Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 07.01.2021

Blatt 9

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Betrachten Sie das Definitheitsverhalten der Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Gehen Sie dazu für jedes der drei Matrizen wie folgt vor:

   (a) Stellen Sie das Definitheitsverhalten mittels des Hurwitz-Kriteriums fest, falls es anwendbar ist. Andernfalls begründen Sie, warum es nicht anwendbar ist.

   (b) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und deren Vorzeichen. Falls das Hurwitz-Kriterium anwendbar ist, überprüfen Sie nun Ihre Antwort aus (a).

2. Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x,y) = x(y^2-1)e^{-x^2-y^2}.$$

3. Die Kugelkoordinaten sind definiert durch

$$\Psi(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ r\sin(\theta) \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Determinante der Jacobi-Matrix von Ψ. An welchen Punkten verschwindet sie? Wie viele Punkte sind das?

4. Für $a \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2a-1 & 2a+2 & 2a+1 \\ a & -a & -a+1 \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   (a) Berechnen Sie $\det(A)$. Wenn nicht $a+1$ herauskommt, haben Sie die Matrix falsch eingegeben. In diesem Fall korrigieren Sie bitte zuerst den Eingabefehler.

   (b) Diagonalisieren Sie A.

   (c) Bestimmen Sie für die drei Eigenvektoren jeweils die euklidische Norm.

   (d) Es gibt einen Wert a_0 für a, der dazu führt, dass einer der Eigenvektoren keine endliche Norm hat (also in Wahrheit gar nicht existiert). Welcher Wert ist das? Es genügt, ihn abzulesen.

   (e) Ist A im Spezialfall $a = a_0$ diagonalisierbar?

5. In der Datei `https://github.com/Ruediger-Braun/compana20/raw/master/A.py` wird eine Matrix A definiert. Laden Sie diese Datei herunter, z. B. indem Sie das Repository clonen. Kopieren Sie sie dann in Ihr Arbeitsverzeichnis, also das Verzeichnis, in dem Ihre Jupyter-Dateien sind. Lesen Sie dann den Quelltext von `A.py`, um sich zu überzeugen, dass der Code in der Datei gutartig ist. Führen Sie sie schließlich in einem Notebook mittels `%run A.py` aus.

   Finden Sie alle Werte von a, für welche die Matrix A diagonalisierbar ist. Das kann beispielsweise durch Berechnung der Jordanform geschehen, wenn man darauf achtet, dass die Transformationsmatrix erstens existiert und zweitens invertierbar sein muss. Stellen, an denen eine der beiden Bedingungen nicht zutrifft, müssen gesondert betrachtet werden.

Bearbeiten Sie bitte die Übungsaufgaben in einem Jupyter-File. Laden Sie bitte Ihr Jupyter-File mit den Lösungen vor dem Abgabetermin in Ihre Gruppe im Ilias hoch. Achten Sie darauf, dass Sie nur ein File hochladen können. Falls Sie aus irgendeinem Grund mehr als ein File hochladen möchten, tun Sie dies bitte in einem Zip-Ordner. Alle Informationen dazu, wie Sie die Aufgaben anschließend in Ihrer Übung vorstellen, finden Sie auf der Übungsseite im Ilias.

Abgabe: Do, 14.01.2021, 10:30 **Vorstellung:** 3. Kalenderwoche