

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Für $a \in \mathbb{R}$ seien die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

und die Funktion

$$f(x, y) = (x, y) \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gegeben. Bestimmen Sie je einen Wert von a , für den M positiv definit, indefinit bzw. positiv semidefinit, aber nicht positiv definit ist. Zeichnen Sie in allen Fällen einen Plot des Graphen von f . Der Verhalten der Funktion in der Nähe des kritischen Punkts muss deutlich zu erkennen sein.

2. Bestimmen Sie die kritischen Punkte und die lokalen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = x(y^2 - 2)e^{-x^2 - \frac{1}{4}y^2}$$

- Bestimmen Sie alle kritischen Stellen von f und die Werte an diesen Stellen sowohl symbolisch als auch numerisch.
- Schauen Sie sich an allen kritischen Stellen die Hessematrix an, um zu erkennen, wie viele Minima, Maxima und Sättel die Funktion besitzt.
- Zeichnen Sie dann den Graphen der Funktion über einem Rechteck, welches alle kritischen Punkte enthält. Nutzen Sie Farben, um einen aussagekräftiges Bild zu erhalten.

Mindestens die Extremalstellen sollte man deutlich erkennen können.

3. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{1}{y}.$$

Zeichnen Sie die Lösungen der Anfangswertaufgaben zu den Anfangsbedingungen $y(1) = y_0$ für $y_0 = 1, 2, 3, 4$ in eine Zeichnung. Wählen Sie dabei den Bereich der x -Achse so, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

Denken Sie daran, dass Sie die Zwischenergebnisse in Variablen abspeichern und später daraus wieder abrufen. (Copy-and-paste und abschreiben sind nicht erlaubt.)

4. Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{xy}.$$

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe zur Anfangsbedingung $y(1) = \frac{1}{9}$. Wenn Sie das mit dem keyword `ics` von `dsolve` versuchen, werden Sie einen `NotImplementedError` erhalten.

Verwenden Sie also `dsolve` ohne Angabe einer Anfangsbedingung. Sie erhalten Ausgaben, die einen Parameter C_1 enthalten, welcher durch Einsetzen der Anfangsbedingung bestimmt werden kann. Das ist leider nicht eindeutig.

Zeichnen Sie die beiden erhaltenen Lösungen zusammen mit dem Richtungsfeld. Sind beide Lösungen korrekt?

Vorstellung: 4. Kalenderwoche