

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Der Sinus löst bekanntlich die Anfangswertaufgabe

$$y'' = -y, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

Machen Sie einen Ansatz $\sin x = \sum_{j=0}^{10} a_j x^j + O(x^{11})$ und bestimmen Sie die a_j durch Koeffizientenvergleich.

2. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden drei Anfangswertaufgaben

$$y' = \frac{y}{x} + x^2 + x^3 - x^4, \quad y(1) = -1, 0, 1.$$

Zeichnen Sie die Graphen aller drei Lösungen in ein Bild. Warum widerspricht dieses Bild nicht dem Satz von Picard-Lindelöf?

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' = xy.$$

Die allgemeine Lösung enthält zwei Funktionen, die nicht zum Stoff der Vorlesungen Analysis I–III gehören. Lesen Sie die Hilfeseiten zu diesen beiden Funktionen. Nach welchem Mathematiker sind sie benannt?

Zeichnen Sie dann die Graphen beider Funktionen in ein Bild; achten Sie dabei darauf, Definitions- und Bildbereich so zu wählen, dass ein aussagekräftiges Bild entsteht.

4. Es seien $\mu, \omega > 0$. Die Gleichung

$$y'' + \mu y' + \omega^2 y = 0$$

ist die Gleichung des gedämpften harmonischen Oszillators. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem. Stellen Sie dann die Wronski-Matrix zu diesem Fundamentalsystem auf und berechnen Sie seine Determinante. Gibt es Paare (μ, ω) , für welche die Wronski-Determinante verschwindet? Dann haben Sie in diesen Fällen noch kein Fundamentalsystem gefunden und müssen weiterarbeiten.

Hinweis: Wenn ein Ergebnis einer vorherigen Rechnung benutzt wird, dann muss dieses mit den Mittel von Python, also durch Zuweisung zu einer Variablen und späteren Rückgriff auf diese geschehen. Copy-and-Paste und Abtippen früherer Ergebnisse sind nicht erlaubt.

Vorstellung: 5. Kalenderwoche