Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 03.11.2022
Blatt 3

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Führen Sie die Berechnung von I_4 aus Lektion 3 so aus, dass das Ergebnis als Funktion von k und nicht von δ angezeigt wird.

2. In der Analysis I oder der Analysis III wird gezeigt, dass die Funktion
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$
im Ursprung beliebig oft differenzierbar ist und dass $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie exemplarisch die zehnte und die zwanzigste Ableitung von f sowie deren Grenzwert für $x \to 0$. Definieren Sie f zunächst mittels `Piecewise`. Beim Ableiten geht das noch gut. Für den Grenzwert müssen Sie die Fälle $x < 0$ (trivial) und $x > 0$ aber getrennt untersuchen.

3. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 \sin(3x) \cos(x)$.
   (a) Bestimmen Sie eine Stammfunktion.
   (b) Bestimmen Sie die zur Bestimmung der Stammfunktion benötigte Zeit.
   (c) Expandieren Sie f als Polynom in x, $\sin(x)$ und $\cos(x)$. Diese Funktion nennen Sie g.
   (d) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von g.
   (e) Bestimmen Sie die zur Bestimmung der Stammfunktion von g benötigte Zeit.
   (f) Stimmen die beiden Stammfunktionen überein? Die Ausgabe ist offensichtlich verschieden, aber handelt es sich um dieselbe Funktion?

4. Versuchen Sie, das bestimmte Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1-x}\,\mathrm{d}x$ symbolisch zu berechnen. Diese Aufgabe wird scheitern. Versuchen Sie nun, den Wert numerisch zu bestimmen.

   Überlegen Sie sich anschließend, dass $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1-x}\,\mathrm{d}x > \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$ und bestimmen Sie das Integral auf der rechten Seite symbolisch. Ist dieses Ergebnis korrekt?

   Wenn Sie noch Zeit haben, probieren Sie an dem zweiten Integral noch ein bisschen herum; beispielsweise könnte man die obere Grenze variabel halten.

Vorstellung: 45. Kalenderwoche