Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 24.11.2022

Blatt 6

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Es seien
$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+9} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{x+2}{x^2-9}.$$
   (a) Bestimmen Sie Stammfunktionen F bzw. G von f bzw. g.
   (b) Überzeugen Sie sich, dass tatsächlich $F' = f$ und $G' = g$.
   (c) Bestimmen Sie $G(0)$. Was fällt auf?
   (d) Prüfen Sie, ob die Gleichung
$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = G(1) - G(0)$$
   trotzdem stimmt.

2. In der Vorlesung hatten wir gesehen, dass das Integral
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{a - \sin(2\pi x)}$$
   für $a > 1$ nicht richtig ausgerechnet wird.

   Es ist aber sehr wohl möglich, dieses Integral zu bestimmen. Finden Sie einen Weg. Vereinfachen Sie dann das Ergebnis, bis es übersichtlich wird.

   Hinweis: Es kommt $\frac{1}{\sqrt{a-1}\sqrt{a+1}}$ heraus.

3. Für einen Parameter a betrachten Sie bitte die Gleichung
$$x(x-1-a)(x+1+a) = a.$$
   Bestimmen Sie die drei Lösungen in Abhängigkeit von a. Setzen Sie nun $a = 0$. Sie erhalten drei verhältnismäßig komplizierte Ausdrücke, von denen auf den ersten Blick noch nicht einmal klar ist, dass sie reell sind. Andererseits ist aus der Gleichung ersichtlich, dass es sich dabei um die Zahlen 0, 1 und -1 handeln muss. Führen Sie entsprechende Vereinfachungen durch.

4. Für einen Parameter a sind die Funktionen f und g gegeben durch
$$f_a(x) = a\log(x+a) \quad \text{und} \quad g_a(x) = ax.$$
   Bestimmen Sie zuerst für allgemeines a die Lösungen der Gleichung $f_a(x) = g_a(x)$. Setzen Sie nun $a = 2$ und bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f_2(x) = g_2(x)$. Zeichnen Sie nun f_2 und g_2, um zu sehen, wie viele Lösungen es gibt.

   Schreiben Sie eine kurze Erläuterung in ein Textfeld.

   Hinweis: Der Plot wird möglicherweise nicht auf Anhieb gelingen, weil f_2 nicht überall definiert ist. Schauen Sie sich die numerischen Werte der Lösungen an, um den Definitionsbereich anzupassen.

Vorstellung: 48. Kalenderwoche