Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 08.12.2022

Blatt 8

Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. In Aufgabe 3 von Blatt 7 war das kleinste $n \in \mathbb{N}_0$ gesucht, für welches
$$\lim_{x \to -1} \frac{(\cos(\pi x) + 1)^2 \sin(\pi x^2)}{(x+1)^n}$$
einen von 0 verschiedenen Grenzwert hat. Entwickeln Sie den Zähler in eine Reihe mit Entwicklungspunkt -1. Dann kann dieses n sofort abgelesen werden.

2. Mit f_n bezeichnen wir die Taylorsche Entwicklung von $\sin x$ im Ursprung zur Ordnung n (also mit Fehlerterm $O(x^n)$). Zeichnen Sie sin sowie f_{11}, f_{20} und f_{52} in ein Bild. Das Intervall, über dem die Graphen gezeigt werden, soll so groß gewählt werden, dass man einen Unterschied zwischen sin und f_{52} erkennen kann.

   Hinweis: Schneiden Sie den Graphen nach oben und unten ab. Dies geschieht, indem der Funktion `plot` die Option `ylim=(-2,2)` übergeben wird.

3. Drücken Sie $\cos^6 \frac{x}{2}$ durch ein Polynom in $\sin x$ und $\cos x$ aus.

   Hinweis: Verwenden Sie eine spezielle Bewertungsfunktion wie in der Vorlesung.

4. Bestimmen Sie $a_0, \ldots, a_5 \in \mathbb{R}$, so dass für
$$r = 1 + \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \frac{a_4}{x^5} + \frac{a_5}{x^6}$$
gilt
$$r^4 = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6} + O\left(\frac{1}{x^7}\right), \; x \to \infty. \tag{1}$$

   Hinweis: Verwandeln Sie die Gleichung (1) durch Koeffizientenvergleich in ein Gleichungssystem.

Vorstellung: 50. Kalenderwoche