Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Düsseldorf, den 15.12.2022

Blatt 9

# Übungen zur Computergestützten Mathematik zur Analysis

1. Bestimmen Sie für
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 9 \\ -16 \\ \vdots \\ 121 \\ -144 \end{pmatrix}$$
den Rang von $v^T \cdot v$ und den von $v \cdot v^T$. Wieso ist das Ergebnis eigentlich schon von vorneherein klar?

2. Es sei $H$ die $15 \times 15$-Hilbertmatrix. Die Matrix $A$ entstehe aus $H$ dadurch, dass das Element $\frac{1}{29}$ in der rechten unteren Ecke ersetzt wird durch $\frac{1}{29} + x$ für eine Unbekannte $x$. Bestimmen Sie denjenigen Wert von $x$, für den $A$ nicht invertierbar ist.

   *Hinweis:* Nutzen Sie die Determinante.

3. Es seien $x_1, \ldots, x_6$ Unbestimmte. Erstellen Sie für $n = 2, \ldots, 6$ die Vandermonde Matrix
$$V_n = \left(x_j^{i-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n}.$$
indem Sie den Konstruktor `Matrix` mit einer Funktion aufrufen (also ähnlich wie bei den Hilbert-Matrizen in der Vorlesung). Berechnen Sie jeweils die Determinante von $V_n$ und faktorisieren Sie diese.

   *Hinweis:* Für $n = 6$ wird es schon schwierig. Man kann unter `?V.det` nachsehen, welche alternativen Verfahren angeboten werden und eines davon auswählen. Wenn man dann nur die faktorisierte Determinante angibt, ist $n = 6$ in wenigen Sekunden zu schaffen.

4. Es sei $A$ eine $n \times m$-Matrix mit $n < m$. Ihre Gramsche Determinante ist definiert als $\det(A \cdot A^T)$. Der Satz von Binet-Cauchy sagt
$$\det(A \cdot A^T) = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_n \le m} \det\left( (a_{j,i_k})_{\substack{j=1,\ldots,n \\ k=1,\ldots,n}} \right)^2.$$
Überprüfen Sie diese Formel für den Fall $n = 2$, $m = 5$, indem Sie ein $A$, welches aus 10 Unbestimmten besteht, einsetzen.

   Wenn Sie noch etwas Zeit haben: Überprüfen Sie das noch für einige andere Werte von $n$ und $m$. Dabei hilft `itertools.combinations` (siehe https://docs.python.org/3/library/itertools.html).

**Vorstellung:** 51. Kalenderwoche