Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 28.04.2015

Blatt 4

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Für $\nu \in \mathbb{C}$ sei J_ν die Besselfunktion erster Art.

   (a) (5P) Zeigen Sie für alle $x > 0$
   $$\frac{d}{dx}\left(x^{-\nu} J_\nu(x)\right) = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$
   Hinweis: Reihenentwicklung verwenden.

   (b) (5P) Zeigen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass J_ν und $J_{\nu+1}$ keine gemeinsame Nullstelle in $(0, \infty)$ haben.

2. (a) (3P) Bestimmen Sie alle Lösungen $u \in C^2(0, 1]$ des Anfangswertproblems
   $$u''(t) + \frac{1}{t} u'(t) = 0, \qquad u(1) = 0.$$

   (b) (5P) Zeigen Sie für beliebiges $\delta > 0$, dass keine der Lösungen aus (a) im energetischen Raum H_E von $\delta \operatorname{id} + B_0$ liegt.

   (c) (2P) Ist 0 ein Eigenwert von $(B_0)_F$?

3. Sei $\nu \geq 0$.

   (a) (2P) Das d'Alembertsche Reduktionsverfahren erlaubt es für lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus einer bekannten Lösung eine weitere, linear unabhängige zu berechnen. (Siehe z. B. 12.25 der Analysis II aus dem Sommer 2012.) Rechnen Sie nach, dass das d'Alembertsche Reduktionsverfahren zu der Lösung
   $$\phi_\nu(x) = -J_\nu(x) \int_x^\epsilon \frac{dt}{t J_\nu^2(t)}, \quad 0 < x < \epsilon,$$
   führt, wenn man $\epsilon > 0$ hinreichend klein wählt.

   (b) (2P) Sei $\delta > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass es $\epsilon > 0$ gibt, so dass
   $$\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(1-\delta) \leq J_\nu(x) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}(1+\delta),$$
   $$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)}(1-\delta) \leq J_\nu'(x) \leq \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} \frac{\nu}{2\Gamma(\nu+1)}(1+\delta), \quad \text{falls } \nu \neq 0,$$
   $$\frac{x}{2}(1-\delta) \leq -J_0'(x) \leq \frac{x}{2}(1+\delta),$$
   für $0 < x < \epsilon$. *Achtung:* ϵ ist nicht gleichmäßig in ν.

   (c) (4P) Sei H_E der energetische Raum zu B_ν, falls $\nu > 0$, bzw. zu $\operatorname{id} + B_0$, falls $\nu = 0$. Zeigen Sie $\phi_\nu \notin H_E$ für ϕ_ν aus Teil (a).

   (d) (1P) Zeigen Sie $Y_\nu \notin H_E$.

Abgabe: Di, 05.05.2015, 10:30 in der Vorlesung. **Besprechung:** 13. Mai