Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 05.05.2015

Blatt 5

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. (a) (7P) Für festes $a > 0$ sei A_F die Friedrichs-Erweiterung des durch $Af = -f''$, $f \in D(A) = \mathscr{D}(0,a)$ gegebenen Operators in $H = L^2[0,a]$. Es seien $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte von A_F. Jeder Eigenwert taucht dabei so oft auf, wie die Dimension seines Eigenraums angibt. Für $R > 0$ sei $N(R) = \#\{n \mid \lambda_n \leq R\}$. Bestimmen Sie $\alpha, \beta > 0$, so dass
$$\lim_{R\to\infty} \frac{N(R)}{R^\alpha} = \beta.$$
   (b) (3P) Für a wie in Teil (a) seien $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots$ die Eigenwerte der Friedrichs-Erweiterung des Operators $Af = -f''$ in $H = L^2[0,a]$ mit $D(A) = \{f \in C^2[0,a] \mid f'(0) = f'(a) = 0\}$. Für $R > 0$ sei $M(R) = \#\{n \mid \mu_n \leq R\}$. Zeigen Sie $M(R) \geq N(R)$ für alle R.

2. Die Version von Theorem 4.1 für die Neumann-Randbedingung lautet:

   Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ ein beschränktes, offenes Gebiet mit C^∞-Rand oder ein Polygon. Dann gibt es eine unbeschränkte, monoton wachsende Folge $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ und ein in $L^2(\Omega)$ vollständiges Orthogonalsystem $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so dass $u_n \in C^\infty(\Omega)$ mit $\Delta u_n = -\lambda u_n$ und $\langle \nabla u_n, \nu\rangle = 0$ für alle Randpunkte, in denen die äußere Normale ν existiert.

   (a) (3P) Sei nun $\Omega = (0,a) \times (0,b)$. Bestimmen Sie durch Separationsansatz ein System $(u_{n,m})_{n,m}$ von Eigenfunktionen von $-\Delta$ mit $\langle \nabla u, \nu\rangle = 0$ in $\partial\Omega \setminus \{(0,0),(0,b),(a,0),(a,b)\}$.
   (b) (7P) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte gefunden wurden, indem Sie zeigen, dass die $(u_{n,m})_{n,m}$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden.
   Hinweis: Spiegeln Sie die $u_{n,m}$ an der y-Achse.

3. Sei $\nu \in \mathbb{C}$.

   (a) (4P) Zeigen Sie für $x > 0$
$$J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x).$$
   Hinweis: Die Funktionalgleichung der Gammafunktion lautet $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$.
   (b) (3P) Zeigen Sie für $\nu \in \mathbb{C}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Existenz von rationalen Funktionen $P_{\nu,m}$ und $Q_{\nu,m}$, so dass
$$J_{\nu+m}(x) = J_\nu(x)P_{\nu,m}(x) + J_{\nu-1}(x)Q_{\nu,m}(x).$$
   (c) (3P) Sei $\nu \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Wenn $x \in \mathbb{R}$ eine gemeinsame Nullstelle von J_ν und $J_{\nu+m}$ ist, dann ist x algebraisch.
   Hinweis: $x \in \mathbb{R}$ heißt *algebraisch*, wenn x Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

Abgabe: Di, 12.05.2015, 10:30 in der Vorlesung. **Besprechung:** 22. Mai