Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 12.05.2015

Blatt 6

Übungen zu Funktionalanalysis II

1. Betrachten Sie die Rechtecke $R = (0,3)\times(0,1)$ und $R_j = (j-1,j)\times(0,1)$, $j = 1,2,3$. Seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf R mit Dirichlet-Randbedingungen und $\nu_1 \le \nu_2 \le \ldots$ die Eigenwerte des Laplace-Operators auf R mit Neumann-Randbedingungen. Ferner sei ein Operator B in $L^2(R)$ gegeben durch $D(B) = \mathscr{D}(R_1) \oplus \mathscr{D}(R_2) \oplus \mathscr{D}(R_3)$ und $Bf = -\Delta f$. Seine Eigenwerte werden mit $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ bezeichnet; in allen Fällen werden Eigenwerte entsprechend ihrer Vielfachheit aufgezählt.

   (a) (je 2P) Bestimmen Sie λ_2, ν_2 und μ_2.

   (b) (4P) Bestimmen Sie das kleinste n mit $\nu_n \ge \lambda_2$.

2. Sei $T = (0,1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Der Operator A in $H = L^2(T)$ sei im Definitionsbereich

$$D(A) = \{F|_T \mid F \in C^2(\mathbb{R}^2) \text{ mit } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : F(x+1,y) = F(x,y+1) = F(x,y)\}$$

   definiert durch $Af = f - \Delta f$.

   (a) (3P) Zeigen Sie, dass A monoton ist.

   (b) (2P) Es sei H_E der energetische Raum von A. Zeigen Sie $H_0^1(T) \subset H_E \subset H^1(T)$.

   (c) (5P) Wegen (b) besitzt A_F ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren. Die Eigenwerte seien aufgezählt als $1+\mu_1 \le 1+\mu_2 \le \ldots$. Die zugehörige Zählfunktion ist $N(R) = \#\{n \in \mathbb{N} \mid \mu_n \le R\}$. Zeigen Sie für alle $R > 0$

$$N_{D,T}(R) \le N(R) \le N_{N,T}(R),$$

   wobei $N_{D,T}(R)$ und $N_{N,T}(R)$ die in Definition 6.1 definierten Zählfunktionen für die Eigenwerte des Laplace-Operators mit Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen sind.

   (d) (0P) Warum heißt das Gebiet T?

3. Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum, sei $U \subset H$ ein Unterraum der Dimension N, und sei $P \in L(H)$ die orthogonale Projektion auf U. Gegeben sei ein selbstadjungierter, kompakter Operator $A \in L(H)$ mit positiven Eigenwerten $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots$. Schließlich sei $B = P \circ A \circ P$.

   (a) (2P) Zeigen Sie, dass B keine negativen Eigenwerte hat.

   (b) (3P) Die Eigenwerte von B seien $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots$. Zeigen Sie $\mu_{N+1} = 0$.

   (c) (5P) Vergleichen Sie λ_n und μ_n für $1 \le n \le N$.
   Hinweis: Sie zeigen entweder $\lambda_n \le \mu_n$ für alle n oder Sie zeigen $\lambda_n \ge \mu_n$ für alle n oder Sie geben einen Operator A, einen Unterraum U sowie $n, m \in \{1,\ldots,N\}$ an, so dass $\lambda_n > \mu_n$ und $\lambda_m < \mu_m$.
   Nach Satz 13.5 der Einführung in die Funktionalanalysis sind orthogonale Projektionen selbstadjungiert.

Abgabe: Di, 19.05.2015, 10:30 in der Vorlesung. **Besprechung:** 27. Mai