Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 20.06.2017

Blatt 10

Übungen zur Funktionentheorie

1. (10P) Sei $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re} z| < \pi,\ |\operatorname{Im} z| < \pi\}$ und sei $f(z) = e^{iz}$. Bestimmen Sie
$$\max_{z\in\overline{G}} |f(z)| \quad \text{und} \quad \min_{z\in\overline{G}} |f(z)|$$

2. (a) (4P) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Die holomorphe Funktion f besitze in $z_0 \in U$ eine Nullstelle und die Funktion g besitze in z_0 einen Pol erster Ordnung. Zeigen Sie
$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = f'(z_0)\operatorname{Res}_{z_0}(g).$$
   (b) (6P) Bestimmen Sie
$$\lim_{z\to\pi} \tan\left(\frac{z}{2}\right)\left(\exp(e^{\pi} - e^{z}) - 1\right).$$

3. Die Funktion f sei holomorph im Ringgebiet $\mathrm{RG}(z_0, r, 0)$.
   (a) (8P) Zeigen Sie: Wenn f eine Stammfunktion besitzt, dann ist z_0 kein Pol der Ordnung 1 von f.
   (b) (2P) Geben Sie eine in $\mathrm{RG}(0, 1, 0)$ holomorphe Funktion f an, die eine Stammfunktion und in 0 einen Pol der Ordnung 2 besitzt.

4. (a) (4P) Zeigen Sie, dass für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ die Reihe
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z-n}$$
   divergiert.
   (b) (6P) Bestimmen Sie komplexe Zahlen a_n, $n \in \mathbb{Z}$, so dass die Funktionenreihe
$$z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} - a_n\right)$$
   kompakt in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ konvergiert.

Abgabe: Di, 27.06.2017, 10:20

Besprechung: 4. bis 6. Juli