Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 27.06.2017

Blatt 11

# Übungen zur Funktionentheorie

1. (Je 2P) Bestimmen Sie zu den folgenden Möbiustransformationen $f$ jeweils eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, so dass $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Geben Sie anschließend die inverse Abbildung an

   (a) $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$, (b) $f(z) = \dfrac{1}{z}$,

   (c) $f(z) = -iz$, (d) $f(z) = z + \sqrt{2}$,

   (e) $f(z) = \dfrac{z+2}{z+1}$.

2. Sei $\psi_i$ die Cayley-Abbildung, und für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $f_\lambda \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ gegeben durch $f_\lambda(z) = z + \lambda$.

   (a) (8P) Schreiben Sie $g_\lambda = \psi_i \circ f_\lambda \circ \psi_i^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ als Möbiustransformation.

   (b) (2P) Berechnen Sie $g_\lambda(0)$ und zeigen Sie, dass $g_\lambda(0) \in \mathbb{D}$.

3. (a) (5P) Es sei $f$ eine ganze Funktion, für die $C > 0$ und $m \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $|f(z)| \leq C|z|^m + C$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass $f$ ein Polynom höchstens $m$-ten Grades ist.

   *Hinweis:* Gehen Sie vor wie beim Beweis des Satzes von Liouville.

   (b) (5P) Sei $g$ eine ganze Funktion, so dass die Funktion $z \mapsto g\left(\frac{1}{z}\right)$ einen Pol besitzt. Verwenden Sie Teil (a), um zu zeigen, dass $g$ ein nicht-konstantes Polynom ist.

4. (10P) Sei $f$ holomorph in einer offenen Umgebung von $\overline{B}_R(0)$ und sei $f(0) = 0$. Zeigen Sie für jedes $r < R$

$$\max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{4r}{R-r} \max_{|z|=R} \operatorname{Re} f(z).$$

**Abgabe:** Di, 04.07.2017, 10:20

**Besprechung:** 11. bis 13. Juli