Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 04.07.2017
Blatt 12

Übungen zur Funktionentheorie

1. (10P) Mit $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})_i$ werde die Isotropiegruppe von i in $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ bezeichnet. Zeigen Sie
$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H})_i = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{-bz+a} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R},\, a^2+b^2=1 \right\}.$$

2. (10P) Zeigen Sie, dass die identische Abbildung der einzige Automorphismus der Einheitskreisscheibe ist, der mehr als einen Fixpunkt besitzt.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass ein Automorphismus mit mehr als einem Fixpunkt gegeben ist. Zeigen Sie zuerst, dass ohne Einschränkung angenommen werden darf, dass einer dieser Fixpunkte der Ursprung ist.

3. (a) (5P) Zeigen Sie, dass jedes Polynom $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung $\hat{p}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ besitzt.

   (b) (3P) Zeigen Sie, dass $\hat{p}$ genau dann ein Automorphismus von $\hat{\mathbb{C}}$ ist, wenn p den Grad 1 hat.

   (c) (2P) Besitzt die Exponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Fortsetzung zu einer Funktion von $\hat{\mathbb{C}}$ nach $\hat{\mathbb{C}}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (10P) Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{D}$ mit $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$ und es sei $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}|f(z_n)| = 1$.

   Hinweis: Es gibt zwei Möglichkeiten, dieses Ergebnis zu zeigen: Man kann das Maximumsprinzip oder die Beschreibung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ aus Satz 23.17 verwenden. Wenn Sie beide Beweise durchführen, erhalten Sie zwei Sonderpunkte.

Abgabe: Di, 11.07.2017, 10:20 **Besprechung:** 18. bis 20. Juli