Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 25.04.2017
Blatt 2

Übungen zur Funktionentheorie

1. (10P) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, dass
$$\int_{\partial\mathbb{D}^+} z^m dz = 0$$
für alle $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

   Hinweis: Wenn man den Begriff der Stammfunktion einer holomorphen Funktion erst einmal hat, ist diese Aufgabe ein Einzeiler. Sie sollen jetzt das Wegintegral aber zu Fuß ausrechnen.

2. (10P) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und es sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in G$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

   Hinweis: Verwenden Sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen.

3. Für feste Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \lambda z + \mu\bar{z}$. Zeigen Sie:
   (a) (3P) f ist genau dann holomorph, wenn $\mu = 0$.
   (b) (4P) f ist genau dann bijektiv, wenn $|\lambda| \neq |\mu|$.
   (c) (3P) f ist genau dann winkeltreu, wenn genau ein der beiden Zahlen λ, μ verschwindet.

   Hinweis: f ist $\mathbb{R}$-linear.

4. (10P) Sei $L = \{1 + it \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass es $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ gibt, so dass
$$\left|\frac{1}{z} - z_0\right| = r \quad \text{für alle } z \in L.$$

   Hinweis: Das Hauptproblem besteht darin, den Mittelpunkt des Kreises zu erraten. Das ist aber nicht so schwer, wenn man berücksichtigt, dass $L = \overline{L}$.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.O0.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

Abgabe: Di, 02.05.2017, 10:20

Besprechung: 9. bis 11. Mai