Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 02.05.2017

Blatt 3

Übungen zur Funktionentheorie

1. Bestimmen Sie die folgenden Wegintegrale mit Hilfe der Definition
   (a) (5P) $\int_{\partial\mathbb{D}^+} \operatorname{Re} z \, dz$,
   (b) (2P) $\int_\gamma |z| dz$ für $\gamma(t) = 2it - i$, $t \in [0,1]$,
   (c) (3P) $\int_\beta |z| dz$ für $\beta(t) = e^{it}$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
2. (10P) Sei $U \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ offen. Eine Funktion $h\colon U \to \mathbb{R}$ der Klasse C^2 heißt *harmonisch,* wenn $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$. Es sei $f\colon U \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Ableitung f' sei ebenfalls holomorph. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind.

   Hinweis: Wir werden in der Vorlesung sehen, dass die Forderung, dass f' holomorph sein soll, immer erfüllt ist.
3. Die Joukowski Abbildung $J\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch $J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
   (a) (2P) Zeigen Sie, dass J surjektiv ist.
   (b) (1P) Ist J injektiv?
   (c) (2P) Gibt es überhaupt Punkte $w \in \mathbb{C}$, für welche die Faser $J^{-1}(w)$ einelementig ist?
   (d) (5P) Zeigen Sie, dass $J(z)$ genau dann reell ist, wenn $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ oder $|z| = 1$.
4. (10P) Es seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ offen, es sei $g\colon U \to V$ stetig und es sei $f\colon V \to \mathbb{C}$ holomorph. Die Funktion $f \circ g$ sei ebenfalls holomorph und f' besitze keine Nullstelle. Zeigen Sie, dass g holomorph ist.

   Hinweis: Verwenden Sie Satz 1.3.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.O0.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

Abgabe: Di, 09.05.2017, 10:20 **Besprechung:** 16. bis 18. Mai