

Übungen zur Funktionentheorie

1. Bestimmen Sie die folgenden Wegintegrale mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes oder der Cauchyschen Integralformel

(a) (2P) $\int_{\partial\mathbb{D}^+} e^{1-\zeta^2} d\zeta,$
(b) (4P) $\int_{\partial B_2(0)^+} \frac{\zeta - \sin(\zeta)}{\zeta^4} d\zeta,$
(c) (4P) $\int_{\partial B_2(1+i)^+} \frac{1}{\zeta^2 - 4} d\zeta.$

Hinweis: Bei Teil (c) ist Partialbruchzerlegung eine Option. Es gibt aber einen eleganten Weg.

2. Es sei $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf der Einheitskreisscheibe.

- (a) (4P) Es gelte $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie $|f^{(n)}(0)| \leq n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) (6P) Es gelte nun $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$ für alle $z \in \mathbb{D}$. Zeigen Sie die Existenz einer Konstanten $C > 0$, so dass

$$|f^{(n)}(0)| \leq C(n+1)! \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Die Cauchysche Abschätzungsformel liefert für jedes $r < 1$ eine Abschätzung. Bei Teil (b) muss zu jedem n das r mit der optimalen Abschätzung bestimmt werden.

3. (Maximumprinzip für Kreisscheiben) Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und es sei $B := B_r(z_0)$ eine offene Kreisscheibe mit $\bar{B} \subset U$. Gegeben sei ferner eine holomorphe Funktion $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) (4P) Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel, um zu zeigen

$$|f(z)| \leq \frac{r}{r - |z - z_0|} \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in B.$$

- (b) (6P) Zeigen Sie

$$|f(z)| \leq \sup_{|\zeta - z_0| = r} |f(\zeta)| \quad \text{für alle } z \in B.$$

Wenden Sie dazu den Teil (a) auf alle Potenzen f^k , $k \in \mathbb{N}$, an.

Bemerkung: Dieser schöne Trick stammt von Landau.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.O0.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.