

Übungen zur Funktionentheorie

1. Der Weg $\gamma: [0, 2] \rightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{cases} e^{2\pi it}, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \text{ oder } \frac{3}{2} \leq t \leq 2, \\ -2 - e^{-2\pi it}, & \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

- (a) (2P) Skizzieren Sie γ .
(b) (8P) Bestimmen Sie $\text{Ind}_\gamma(w)$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$.

Hinweis: Verwenden Sie Satz 10.7.

2. (10P) In $U = \mathbb{C} \setminus \{-2, 0, 2\}$ seien die folgenden Wege gegeben: $\gamma_1 = \partial B_3^+(-2)$, $\gamma_2 = \partial B_1^+(0)$, $\gamma_3 = \partial B_3^+(2)$ und $\gamma_4 = \partial B_1^+(-2i)$. Für welche Wahlen von $m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}$ ist der Zykel $T = \sum_{j=1}^4 m_j \gamma_j$ homolog zu $\partial B_5^+(0)$? Gibt es mehrere Lösungen?

3. (10P) Geben Sie eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{C} an, so dass $(\sin(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist. (Wegen des Satzes von Liouville ist klar, dass der komplexe Sinus unbeschränkt ist. Die Aufgabe besteht darin, eine konkrete Folge anzugeben.)

Zusatz: Sie erhalten einen Sonderpunkt, wenn Sie die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ so wählen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(|\sin(z_n)|)}{|z_n|}$$

maximal ist, und einen weiteren Sonderpunkt, wenn Sie die Maximalität beweisen.

4. (Ohne Wertung)

- (a) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet. Die Zahl R sei so gewählt, dass $|z| < R$ für alle $z \in G$. Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus G$ gebe es einen stetigen Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus G$ mit $\gamma(a) = z$ und $|\gamma(b)| = R$. Zeigen Sie, dass G einfach zusammenhängend ist.
(b) Geben Sie zwei einfach zusammenhängende Gebiete $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ an, so dass $G_1 \cup G_2$ wegzusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist.

Werfen Sie Ihre Lösungen in den dafür vorgesehenen Übungsbriefkasten auf dem Flur zum Geschäftszimmer 25.22.00.55, nachdem Sie sie mit einem ausgefüllten Deckblatt zusammengeheftet haben. Nach dem Abgabetermin eingeworfene Bearbeitungen können nicht berücksichtigt werden. Es ist nur ein Name pro Bearbeitung erlaubt.

Abgabe: Di, 16.05.2017, 10:20

Besprechung: 30. und 31. Mai und 1. Juni