

Übungen zur Funktionentheorie

- (a) (2P) Welche der beiden Zahlen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ist gleich $i^{1/2}$ und warum?
(b) (2P) Bestimmen Sie $\left(\frac{1}{i}\right)^{1/2}$.
(c) (3P) Geben Sie $z, w \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ an, so dass $zw \notin]-\infty, 0]$ und $(zw)^{1/2} \neq z^{1/2}w^{1/2}$.
(d) (3P) Geben Sie $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ an, so dass $z^3 \notin]-\infty, 0]$ und $(z^3)^{1/3} \neq z$.

- (a) (Je 1P) Mit \log werde der Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet. Bestimmen Sie

$$\log(-e^{2i}), \quad \log\left(\frac{e}{i}\right), \quad \log(e^{3i}), \quad \log(e^{6i}).$$

- (b) (6P) Es sei $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, und für $j = 0, \dots, 3$ sei

$$G_j = \mathbb{C} \setminus \{i^j wx \mid -\infty < x \leq 0\}.$$

Nach Satz 12.5 existiert ein Zweig des Logarithmus auf G_j . Wir bezeichnen ihn mit f_j . Bestimmen Sie $f_j(i)$ und $f_j(-1)$ für $j = 0, \dots, 3$. Für welche j gilt $f_j(-1) = 2f_j(i)$?

- Mit \log werde der Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet.

- (a) (4P) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von

$$f(z) = \frac{1}{2i} (\log(1+iz) - \log(1-iz)).$$

- (b) (2P) Zeigen Sie, dass $f'(x)$ reell ist für reelles x .

- (c) (4P) Zeigen Sie

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: Auf diese Weise haben Sie den Arcustangens zu einer holomorphen Funktion fortgesetzt, deren Definitionsbereich das in Teil (a) bestimmte Gebiet ist.

- (10P) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet derart, dass für jedes $z \in G$ auch $\bar{z} \in G$ gilt. Wir setzen $G_+ = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Es sei $f: G_+ \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Ferner besitze f eine stetige Fortsetzung $g: G_+ \cup (G \cap \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$.

Zeigen Sie: Wenn $g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G \cap \mathbb{R}$, dann wird durch

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G_+, \\ g(z), & z \in G \cap \mathbb{R}, \\ \overline{f(\bar{z})}, & \bar{z} \in G_+, \end{cases}$$

eine in G holomorphe Funktion gegeben.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.