Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

Düsseldorf, den 23.05.2017
Blatt 6

Übungen zur Funktionentheorie

1. (a) (2P) Welche der beiden Zahlen $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ und $\frac{-1}{\sqrt{2}}(1+i)$ ist gleich $i^{1/2}$ und warum?

   (b) (2P) Bestimmen Sie $\left(\frac{1}{i}\right)^{1/2}$.

   (c) (3P) Geben Sie $z, w \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ an, so dass $zw \notin]-\infty, 0]$ und $(zw)^{1/2} \neq z^{1/2}w^{1/2}$.

   (d) (3P) Geben Sie $z \in \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ an, so dass $z^3 \notin]-\infty, 0]$ und $\left(z^3\right)^{1/3} \neq z$.

2. (a) (Je 1P) Mit log werde der Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet. Bestimmen Sie

$$\log(-e^2 i), \qquad \log\left(\frac{e}{i}\right), \qquad \log\left(e^{3i}\right), \qquad \log\left(e^{6i}\right).$$

   (b) (6P) Es sei $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, und für $j = 0, \ldots, 3$ sei

$$G_j = \mathbb{C} \setminus \left\{ i^j wx \middle| -\infty < x \leq 0 \right\}.$$

   Nach Satz 12.5 existiert ein Zweig des Logarithmus auf G_j. Wir bezeichnen ihn mit f_j. Bestimmen Sie $f_j(i)$ und $f_j(-1)$ für $j = 0, \ldots, 3$. Für welche j gilt $f_j(-1) = 2f_j(i)$?

3. Mit log werde der Hauptzweig des komplexen Logarithmus bezeichnet.

   (a) (4P) Bestimmen Sie den Definitionsbereich von

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(\log(1+iz) - \log(1-iz)\right).$$

   (b) (2P) Zeigen Sie, dass $f'(x)$ reell ist für reelles x.

   (c) (4P) Zeigen Sie

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

   Hinweis: Auf diese Weise haben Sie den Arcustangens zu einer holomorphen Funktion fortgesetzt, deren Definitionsbereich das in Teil (a) bestimmte Gebiet ist.

4. (10P) (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet derart, dass für jedes $z \in G$ auch $\overline{z} \in G$ gilt. Wir setzen $G_+ = \{z \in G \mid \operatorname{Im} z > 0\}$. Es sei $f\colon G_+ \to \mathbb{C}$ holomorph. Ferner besitze f eine stetige Fortsetzung $g\colon G_+ \cup (G \cap \mathbb{R}) \to \mathbb{C}$.

   Zeigen Sie: Wenn $g(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in G \cap \mathbb{R}$, dann wird durch

$$h(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G_+, \\ g(z), & z \in G \cap \mathbb{R}, \\ \overline{f(\overline{z})}, & \overline{z} \in G_+, \end{cases}$$

   eine in G holomorphe Funktion gegeben.

   Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Morera.

Abgabe: Di, 30.05.2017, 10:20 **Besprechung:** 6. bis 8. Juni