Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 13.06.2017
Blatt 9

Übungen zur Funktionentheorie

1. Bestimmen Sie sämtliche isolierten Singularitäten der folgenden Funktionen. Geben Sie für jede Singularität an, ob es sich um einen Pol, eine wesentliche oder eine hebbare Singularität handelt.

   (a) (2P) $\dfrac{i}{z^4-1}$, (b) (3P) $\dfrac{1-\cos(z)}{\sin(z)}$,

   (c) (2P) $\cot\left(\dfrac{1}{z}\right)$, (d) (3P) $\dfrac{1}{\cot z}$.

   Hinweis: $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

2. (a) (3P) Es sei $\omega = e^{i\pi/6}$. Zeigen Sie
$$\frac{1}{\omega^{25}}\left(1+\omega^{10}+\omega^{20}\right) = -2i,$$
   indem Sie die Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe verwenden.
   Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

   (b) (7P) Bestimmen Sie nun
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}\,dx$$
   mit Hilfe des Residuensatzes.
   Hinweis: Die Aufgabe ist vollständig gelöst, wenn rationale Zahlen a, b angegeben sind, so dass $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6}dx = a + b\pi$.

3. Es sei $G = \mathbb{C} \setminus \{iy \mid y \leq 0\}$.

   (a) (2P) Es sei f_1 derjenige Zweig des Logarithmus auf G, der auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 0, \operatorname{Im} z < 0\}$ mit dem Hauptzweig übereinstimmt. Bestimmen Sie $f_1(1)$.

   (b) (2P) Gibt es einen Zweig f_2 des Logarithmus auf G mit $f_2(i) = -i\frac{\pi}{2}$?

   (c) (6P) Gibt es einen Zweig f_3 des Logarithmus auf G mit $f_3(1) = 4f_3(i)$?

4. (10P) Gegeben sei das Polynom $p(z) = z^8 - 8z^5 + 2$.

   (a) (5P) Zeigen Sie, dass p in $B_1(0)$ genau fünf Nullstellen besitzt.

   (b) (5P) Wie viele Nullstellen besitzt p in $B_{1/2}(2)$? Begründen Sie Ihre Aussage.

   Hinweis: Bei beiden Teilen verwenden Sie bitte den Satz von Rouché. Die Anzahl der Nullstellen ist unter Berücksichtigung der Vielfachheiten gemeint.

Abgabe: Di, 20.06.2017, 10:20 **Besprechung:** 27. bis 29. Juni