Mathematisches Institut
Prof. Dr. R. Braun

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Düsseldorf, den 23.10.2013
Blatt 2

Übungen zu Einführung in die partiellen Differentialgleichungen

1. (10P) (*Laplace in ebenen Polarkoordinaten*) Für eine Funktion u von der Klasse C^2 setze
$$v(r,\phi) = u(r\cos\phi, r\sin\phi).$$
Wie immer sei der Laplace-Operator definiert als $\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. Zeigen Sie für $r > 0$ und $\phi \in \mathbb{R}$
$$\Delta u(r\cos\phi, r\sin\phi) = v_{rr} + \frac{1}{r^2} v_{\phi\phi} + \frac{1}{r} v_r.$$

2. (10P) Gibt es nicht-konstante Lösungen der Laplace-Gleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, die nur vom Winkel abhängen?

3. Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definiert man die *Kelvin-Transformierte* $v \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ durch
$$v(x) = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)|x|^{2-n}.$$
   (a) (8P) Es sei u harmonisch. Zeigen Sie, dass dann auch die Kelvin-Transformierte von u harmonisch ist.
   (b) (2P) Bestimmen Sie die Kelvin-Transformierte der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in n Veränderlichen, $n \geq 2$.

4. Betrachten Sie für $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ und $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ das Anfangswertproblem
$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= g && \text{in } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{aligned}$$
   (a) (5P) Bestimmen Sie eine Lösung.
   (b) (5P) Zeigen Sie deren Eindeutigkeit.

Abgabe: Di, 29.10.2013, 10:20 **Besprechung:** 5., 6. und 8. November