Gdt o-minimalité
3 mai 2017
Daniele Turchetti
Le théorème de Masser-Zannier (Partie 2)

Thm (2010) : Pour tout $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ soient $E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$
$P_\lambda = (2, \sqrt{2(2-\lambda)})$, $Q_\lambda = (3, \sqrt{6(3-\lambda)})$. Alors l'ensemble
$\{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\} : P_\lambda \text{ et } Q_\lambda \text{ sont de torsion sur } E_\lambda\}$ est fini.

Ingrédients de la preuve :

0. Boîte noire (lemme 1) : si λ_0 est tel que P_{λ_0} ou Q_{λ_0} est de torsion, alors $h(\lambda_0) < c$

1. Uniformisation "uniforme".

$$\mathbb{C}/L_\lambda \xrightarrow{\sim} E_\lambda \qquad L_\lambda = \mathbb{Z} f(\lambda) + \mathbb{Z} g(\lambda)$$

Dans $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z-1| < 1\}$ on a

$$f(\lambda) = \pi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[(2m)!]^2}{2^{4m}(m!)^4} \qquad g(\lambda) = \pi i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m!)^2}{2^{4m}(m!)^4} (1-\lambda)^m$$

P_λ et Q_λ sont déterminés par des logarithmes elliptiques :

$$z(\lambda) = 2 \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}} , \quad w(\lambda) = 2 \int_3^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(x-\lambda)}}$$

Rmq : les fonctions f, g, z, w admettent un prolongement analytique sur tout disque $D \subset \mathbb{C} \setminus \{0,1,2,3\}$ avec monodromie

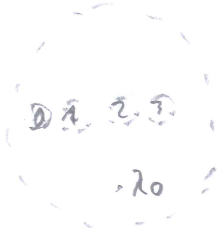
Chemin autour de 0 : $f \longmapsto 2f + g$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
" " " 1 : $g \longmapsto f - 2g$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
" " " 2 : $z \longmapsto -z$
(mais pas 3 3?) $w \longmapsto w$

2. Prolongement analytique :

$z(\lambda) = x(\lambda) f(\lambda) + y(\lambda) g(\lambda)$
$w(\lambda) = u(\lambda) f(\lambda) + v(\lambda) g(\lambda)$

donc x, y, u, v définissent une application $\Theta : \Lambda \longrightarrow \mathbb{R}^4$
$\lambda \longmapsto (x(\lambda), y(\lambda), u(\lambda), v(\lambda))$.
(le choix du prolongement ne sera pas important).

Déf : $\Lambda_B = \{ \frac{1}{B} \leq |z| \leq B,\ |z-t| \geqslant 1/B$ pour $t = 1,2,3 \}$



$\Lambda_B \subseteq \bigcup_{\ell=1}^{n} D_\ell$ avec $D_\ell \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0,1,2,3\}$.

si P_{λ_0} ou Q_{λ_0} est de torsion, $d(\lambda_0) = [\mathbb{Q}(\lambda_0) : \mathbb{Q}] < \infty$.

donc s'il y a au moins $\delta \cdot d(\lambda_0)$ conjugués dans $\{ |z| > B \}$ alors $h(\lambda_0) \geqslant \delta B$ car $h(\lambda_0) = \left(\sum_v \log \max \{1, |\lambda_0|_v\} \right) \frac{1}{d(\lambda_0)}$

mais $h(\lambda_0) < C$, donc pour B assez grand on trouve une contradiction. ($\Rightarrow$ il n'existe pas $\delta d(\lambda_0)$ conjugués pour tout λ_0 avec δ qui ne dépend pas de λ_0).
même idée : si $\delta d(\lambda_0)$ conj. dans $\{ |z-1| < \frac{1}{B} \}$

alors $h\left(\frac{1}{\lambda_0 - 1}\right) \geqslant \delta B$ et $h\left(\frac{1}{\lambda_0 - 1}\right) = h(\lambda_0 - 1)$
$= h(\lambda_0) + \log(2)$.

donc il existe D_ℓ, $\exists\, 0 \leq \eta < 1$ ne dép. pas de λ_0 t.q. D_ℓ contient au moins $\eta\, d(\lambda_0)$ conjugués.
(notons que $d(\lambda_0)$ n'est pas unif. borné (pourquoi ?)).

3. Un résultat de transcendance.

$\Theta_\ell : D_\ell \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\Theta_\ell(D_\ell) =: S$.

<u>lemme 3</u> : S ne contient pas de sous-ensemble semi-alg. infini.

Preuve du Thm :

Soit λ_0 t.q $P_{\lambda_0}, Q_{\lambda_0}$ soient de torsion (d'ordres n, m avec $n \leq m$)

David Masser (DM) $\Rightarrow m \leq C_1 d(\lambda_0)^2 (1 + h(\lambda_0)) \leq C_1 d(\lambda_0)^2 (1+C)$

$\Rightarrow d(\lambda_0) \geq C_2 \sqrt{m}$

$\theta_\ell : D_\ell \to \mathbb{R}^4$, par le lemme 2 + DM + petit argument

nous donne $\# \{ \theta_\ell(\lambda) : \lambda \text{ conj de } \lambda_0 \} \geq C_3 \sqrt{m}$

(petit arg : peut se faire avec l'o-min) pour borner uniformément les fibres.

Mais lemme 3 + Pila-Wilkie

$\Rightarrow \# \{ x \in S : h(x) \leq N \} \leq C_\varepsilon N^\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$

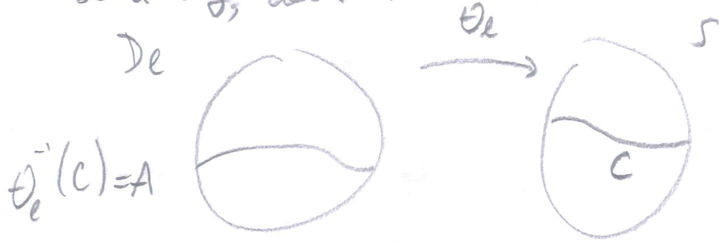
$\Rightarrow \# \{ x \in S : x = \theta_\ell(\lambda_0) \} \leq C_\varepsilon (nm)^\varepsilon < C_6 m^{2\varepsilon}$

si $\varepsilon < 1/4$ alors m est borné donc

$\# \{ \lambda : P_\lambda, Q_\lambda \text{ de torsion} \} < \infty$.

Stoll en 2014 montre que pour 2 et 3, l'ensemble c'est en fait vide. Mais il y a des a, b où l'ensemble $\{ \lambda : P_\lambda^a, Q_\lambda^b \text{ de torsion} \} < \infty$ et non-vide.

Preuve : par l'absurde. Soit $C \subset S$ est un tel sous-ensemble semi-alg, connexe. ②



$\theta_e(\lambda) = (x_e(\lambda), y_e(\lambda), u_e(\lambda), v_e(\lambda))$

$\deg tr\ (\mathbb{C}(x_e, y_e, u_e, v_e)/\mathbb{C}) \leq 1$ les fonct. sur A

$\deg tr\ (\mathbb{C}(f_e, g_e, z_e, w_e)/\mathbb{C}) \leq 3$ sur A

donc $\exists\ P \in \mathbb{C}[X_1, X_2, X_3, X_4]$ t.q. $P(f_e, g_e, z_e, w_e) = 0$, sur A. Par prolongement analytique, $P(f_e, g_e, z_e, w_e) = 0$ sur De, (car De est compact). De plus, $P(f, g, w, z) = 0$ sur Λ par un argument de monodromie.

Aussi $P(f, g, z, w)$ sur $\Lambda \Rightarrow P(f-2g, g, z, w)$

même comme $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ est Zar. dense dans $Sl_2(\mathbb{Z})$

alors $P(\sigma(f), \sigma(g), z, w) = 0$ pour tout $\sigma \in Sl_2(\mathbb{Z})$,

et cela implique que $P \in \mathbb{C}[X_3, X_4]$ donc $P(z, w) = 0$.

(on a besoin ici du fait que le polynôme P soit homogène et donc de travailler dès le début avec le deg tr h, le deg. tr homogène).

On en déduit aussi que $w = cz$ (chemin autour de 2 nous donne une contradiction).

Avec cela on peut faire la preuve du Thm.