

Algebra – Freiwilliges Blatt 14

Keine Abgabe

Hinweis: Für so ziemlich alle Aufgaben auf diesem Blatt ist der Hauptsatz der Galois-Theorie nützlich.

Für Aufgaben 3 bis 5 ist außerdem ein Satz nützlich, der erst am Montag dran kommt. Aufgaben 3 und 4 gehen aber auch ganz gut ohne den Satz.

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad 4 mit vier verschiedenen Nullstellen a_1, \dots, a_4 und sei $L = K(a_1, \dots, a_4)$ der Zerfällungskörper von f . Zeigen Sie:

(a) $b := a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 \in K$.

Hinweis: Was lässt sich über $\sigma(b)$ sagen für $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$?

(b) $[K(a_1 + a_2) : K] \leq 6$.

Hinweis: Auf welche Elemente von L (oder von K^{alg}) kann $a_1 + a_2$ durch Automorphismen von L (oder von K^{alg}) abgebildet werden?

Aufgabe 2:

Sei K ein Körper der Charakteristik 0, $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 3 und sei $L \supset K$ der Zerfällungskörper von f .

(a) Zeigen Sie: Die Galoisgruppe $\text{Aut}(L/K)$ ist entweder isomorph zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ oder isomorph zu S_3 .

(b) Geben Sie für die beiden Fälle aus (a) jeweils ein Beispiel an.

Hinweis: Für S_3 haben Sie schon Beispiele gesehen. Danach lassen sich mit dem Hauptsatz der Galois-Theorie auch für beliebige Untergruppen $H \subset S_3$ Beispiele von Körpererweiterungen mit Galois-Gruppe H finden.

Aufgabe 3:

Sei L/K eine Galois-Erweiterung. Wir nehmen an, dass die Galois-Gruppe $\text{Aut}(L/K)$ isomorph zu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist.

Bestimmen Sie, wie viele Zwischenkörper F_i es gibt, geben Sie an, wie diese Zwischenkörper ineinander liegen und geben Sie, falls $F_i \subset F_j$ ist, den Grad $[F_j : F_i]$ an.

Aufgabe 4:

Sei L/K eine Galois-Erweiterung vom Grad 90. Zeigen Sie, dass es (mindestens) einen Zwischenkörper F mit $[F : K] = 10$ gibt.

Hinweis: Verwenden Sie die Existenz von p -Sylow-Untergruppen für geeignetes p .

Aufgabe 5:

Sei L/K eine Galois-Erweiterung mit $[L : K] = 49$. Zeigen Sie, dass es einen Zwischenkörper F gibt mit $[F : K] = 7$ und so dass F/K normal ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Sätze 1.6.5 und 1.6.7.