Alg 18, B71

A1 (a) Beh: Wahr.

[Bew: ($\Leftarrow$) Für $a \in K$ ist $f_a(a) = 0$ wobei $f_a := x - a$. Also jedes $a \in K$ hat Grad 1 über K.

[Bem: Gerade $a = 0$ hat Grad 1]

($\Rightarrow$) Angenommen $a \in L$ mit Grad 1 über K. Nach Def 3.2.3 hat $Mipo_{a/K}(x) \in K[X] \setminus \{0\}$ Grad 1. Also ist $Mipo_{a/K}(x) = x + b_0$ mit $b_0 \in K$. Nach Def ist $Mipo_a(a) = 0 = a + b_0$.

$\Rightarrow a = -b_0 \in K$ ⌟

(b) Falsch.

Gegenbeispiel: Sei $a \in L$ transzendent über $K = \mathbb{Q}$ z.B. $a = \pi$. Nach A1, (c) lässt $\frac{1}{\pi}$ sich NICHT als K-Linearkombination von Potezen von a schreiben

(c) Beh: Wahr

Bew: Angenommen $a \in L \setminus \{0\}$ mit geeignet $b_i \in K$,

$$\frac{1}{a} = \sum_{i=0}^{n} b_i a^i = \left(\sum_{i=0}^{n} b_i X^i\right)(a). \text{ Sei } f := \underbrace{\sum_{i=0}^{n} b_i X^i}_{\in K[X]}.$$

Also $\frac{1}{a} = f(a)$

$\Rightarrow 1 = a \cdot f(a) \Rightarrow a \cdot f(a) - 1 = 0 \Rightarrow a$ algebraisch$/K$ weil a eine Nullstelle von $(X \cdot f(X) - 1) \in K[X]$ ist.

A1 (d) Falsch

[Gegenbeispiel: Seien $K = \mathbb{Q}$, $a = i$, $a' = i + 1$.

Dann $\mathbb{Q}(a) = \mathbb{Q}(i) = \mathbb{Q}(i+1) = \mathbb{Q}(a')$.

$MiPo_{i/\mathbb{Q}} = X^2 + 1$ aber $(i+1)^2 = i^2 + 2i + 1 = 2i \neq 0$.

Also $MiPo_{i+1/\mathbb{Q}} \neq X^2 + 1$. ⌟

(e) Falsch

[Gegenbeispiel: Seien $K = \mathbb{Q}$, $a = i$, $a' = -i$.

$MiPo_{i/\mathbb{Q}} = X^2 + 1 = MiPo_{-i/\mathbb{Q}}$ aber $a \neq a'$. ⌟

Alg 15, Bl 11 ②

$\boxed{A2}$ (a) <u>Beh</u>: $K := \{a_0 + a_1 \sqrt[3]{2} + a_2 (\sqrt[3]{2})^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$.

<u>Bew</u>: Klar dass $\mathbb{Q} \subsetneq K \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, da $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Offensichtlich $\mathbb{Q}(\alpha) \supseteq K$. Z.z. „$\subseteq$“.

$\mathrm{MiPo}_{\sqrt[3]{2}/\mathbb{Q}} = \underbrace{X^3 - 2}_{=:f}$, da $(\sqrt[3]{2})^3 - 2 = 0$ und $f := X^3 - 2$ irr. ist (nach Eisenstein mit $p = 2$).

Betrachte $K' := \mathbb{Q}[X]/(f)$.

Nach Beispiel 2.2.8, es gibt eine Bijektion φ

$$\begin{array}{ccc} \{a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}\} & \xrightarrow{\varphi} & K' \\ \downarrow \psi_{\sqrt[3]{2}} & & \downarrow \overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}} \\ K & & \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \end{array}$$

Wobei $\overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}} : K' \longrightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ist der Isomorphismus von Satz 3.2.5 (a) und $\psi_{\sqrt[3]{2}} : f \longmapsto f(\alpha)$ der Einsetzungshomomorphismus auf $\sqrt[3]{2}$.

Es gilt φ, $\psi_{\sqrt[3]{2}}$, $\overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}}$ setze $\mathbb{Q}$ fort, also auch $\psi_{\sqrt[3]{2}} \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}}^{-1}$.

Zusätzlich $\psi_{\sqrt[3]{2}} \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}}^{-1}(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{2}$.

Also ist $\psi_{\sqrt[3]{2}} \circ \varphi^{-1} \circ \overline{\psi}_{\sqrt[3]{2}}^{-1}$ die Inklusion $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq K$. $\square$

(b) Wie Hinweis, suchen $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$ so das.

$$(a_0 + a_1 \sqrt[3]{2} + a_2 (\sqrt[3]{2})^2) \cdot (1 + \sqrt[3]{2}) = 1$$
$$\parallel$$
$$a_0 + (a_0 + a_1)\sqrt[3]{2} + (a_1 + a_2)(\sqrt[3]{2})^2 + 2a_2 = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 \\ a_2 = -a_1 = a_0 \\ 2a_2 + a_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -a_0 = -\tfrac{1}{3} \\ a_2 = a_0 = \tfrac{1}{3} \\ a_0 = \tfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1 + \sqrt[3]{2})} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3} + \frac{(\sqrt[3]{2})^2}{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$$

Alg '18, Bl 11 (3)

A3 (a) $f(X) := X^5 - 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach Eisenstein mit $p=2$.

(b) Für alle $i \in \{0,1,2,3,4\}$ ist

$$\left(\zeta_5^i \sqrt[5]{2}\right)^5 - 2 = e^{5 \cdot 2\pi i/5} \cdot \left(\sqrt[5]{2}\right)^5 - 2$$
$$= e^{2\pi i} \cdot 2 - 2 = 2 - 2 = 0$$

Also ist $\zeta_5^i \sqrt[5]{2}$ ein Nullstelle von f.

Zusätzlich, für jedes $j \gneq i$, $j \in \{0,1,2,3,4\}$ ist

$$\zeta_5^i \sqrt[5]{2} - \zeta_5^j \sqrt[5]{2} = \underbrace{\sqrt[5]{2}\, \zeta^{i}}_{\neq 0} \underbrace{\left(1 - \zeta^{j-i}\right)}_{\neq 0} \neq 0$$

[$\mathbb{C}$ hat kein Nullteiler].

Also sind $\zeta_5^i \sqrt[5]{2} \in \mathbb{C}$ p.w. verschiedene.

f hat am höchstens $\deg f = 5$ verschiedene Nullstelle. Also $\zeta_5^i \sqrt[5]{2}$ sind alle die Nst in $\mathbb{C}$.

(c) Erstmals, $\sqrt[5]{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$ ist ein Nst von f.

Offensichtlich $\zeta_5^i \sqrt[5]{2} = e^{2\pi i/5} \cdot \sqrt[5]{2} \notin \mathbb{R}$ for $i \in \{1,2,3,4\}$.

Also nach Hinweis und (b) ist $\sqrt[5]{2}$ die einzige Nst von f in $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.

(d) Offensichtlich ist $\zeta_5 = e^{2\pi i/5} \notin \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.

Also ist $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \neq \mathbb{Q}(\zeta_5\, e^{2\pi i/5})$.

Aber nach Satz 3.2.5 (a) es gibt (eindeutige) Isomorphismen $f_0 : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}[X]/(f)$

$$f_1 : \mathbb{Q}(\zeta_5 \sqrt[5]{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}[X]/(f)$$

$\Rightarrow f_1^{-1} \circ f_0 : \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_5 \sqrt[5]{2})$ ist ein Iso.

[(a) und (b) $\Rightarrow f = \mathrm{MiPo}_{\sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}} = \mathrm{MiPo}_{\zeta_5 \sqrt[5]{2}/\mathbb{Q}}$]

(e) $\zeta_5 = \zeta_5 \sqrt[5]{2} / \sqrt[5]{2} \in L = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}, \zeta_5 \sqrt{2})$.

Auch $\zeta_5^i \cdot \sqrt[5]{2} = (\zeta_5)^i \sqrt[5]{2} \in L$, für alle $i \in \{0,1,2,3,4\}$.

Also die Behauptung folgt aus (b).

B17

A4 (a) Angenommen $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Also $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow 3 = a^2 + 2a.b\sqrt{2} + 2b^2$

$\Rightarrow 0 = (a^2 + 2b^2 - 3) + 2a.b\sqrt{2}$.

$\{1, \sqrt{2}\}$ Lin. unab. $/\mathbb{Q}$ $\Rightarrow a.b = 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$.

Fall 1: $(a=0)$

Also $2b^2 = 3 \Rightarrow b^2 = 3/2$ $\lightning$ $b \in \mathbb{Q}$

Fall 2: $(b=0)$

Also $a^2 = 3$ $\lightning$ $a \in \mathbb{Q}$.

$\lightning$

Also $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$

(b) Nach (a) hat $g := X^2 - 3$ keine Nullstellen in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Also ist $\deg(g) = 2$ mit keine Nst.

$\Rightarrow X^2 - 3$ irreduzible in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})[X]$

Also ist $MiPo_{\sqrt{3}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})} = X^2 - 3 = g$.

Also $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = \deg g = 2$.

Nach Satz 3.1.6 ist

$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}]$

$= 2 \cdot 2 = 4$.

(c) Bemerke dass (nach (b))

$\deg(MiPo_{\alpha/\mathbb{Q}}) \leq 4$.

$\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} = 5 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$\alpha^3 = 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 9\alpha + 2\sqrt{2}$.

$\alpha^4 = 9\alpha^2 + 4 + 2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow \alpha^4 = 9\alpha^2 + 4 + \alpha^2 - 5 = 10\alpha^2 - 1$.

$\Rightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$. (*) ein $\mathbb{Q}$-lin Abhängigkeit zwischen $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4\}$.

Aber bemerke, dass $\{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3\}$ $\mathbb{Q}$-lin Unabhängig ist. Also $\deg(MiPo_{\alpha/\mathbb{Q}}) > 3$.

Es folgt nach (*) dass $MiPo_{\alpha/\mathbb{Q}} = X^4 - 10X^2 + 1$

(d) $\sqrt{2} = \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{9}{2}\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Also $\sqrt{3} = \alpha - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\alpha)$

$\square$