

Algebra - Freiwilliges Blatt 14 - Lösungsvorschlag

L/K ist galoissch, da $\text{char}(K) = 0$.

A1 (a) Beh: Für $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ gilt $\sigma(b) = b$.

Bew: Sei $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ beliebig. Nach

Blatt 13 A3b ist $\{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_4)\}$ die Menge der Nullstellen von $\sigma(f)$. Da $f \in K[X]$ und $\sigma|_K = \text{id}_K$ ist $\sigma(f) = f$, also $\{\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_4)\} = \{a_1, \dots, a_4\}$.

$$\begin{aligned} \text{Es folgt } \sigma(b) &= \sigma(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5) \\ &= \sigma(a_1)^5 + \sigma(a_2)^5 + \sigma(a_3)^5 + \sigma(a_4)^5 \\ &= a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + a_4^5 \\ &= b. \end{aligned}$$

Also ist $b \in \text{Fix}(\text{Aut}(L/K)) = K$
↑ Hauptsatz.

(b) Nach Satz 3.6.5 gibt es genau $[K(a_1, a_2) : K]$ viele Einbettungen von $K(a_1, a_2)$ in K^{alg} , die auf K die Identität sind. Jede solche lässt

sich (nach Satz 3.4.8) zu einem $\sigma \in \text{Aut}(K^{\text{alg}}/K)$ fortsetzen (d.h. $\sigma|_{K(a_1, a_2)}$ ist die ursprüngl. Einbettung von $K(a_1, a_2)$ in K^{alg}).

Jedes solche σ bildet die Nullstellen von f auf die Nullstellen von f ab, d.h. $\sigma(a_i, a_{i+2}) = a_i, a_{i+2}$ für geeignete $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$. Dafür gibt es

6 Möglichkeiten (höchstens):
 a_1, a_2, a_3, a_4
 a_2, a_3, a_3, a_4

Da $\sigma|_{K(a_1, a_2)}$ schon durch $\sigma(a_i, a_{i+2})$ festgelegt wird gibt es höchstens 6 Einbettungen, d.h. $[K(a_1, a_2) : K] \leq 6$.

Bem: Die Voraussetzung $\text{char}(K) = 0$ ist nicht wirklich notwendig, wir haben sie nur benutzt um zu wissen, dass L/K separabel ist. Es gilt aber allgemein, dass der Zerfällungskörper eines Polynoms ohne doppelte Nullstellen separabel über dem Grundkörper ist.

A2 (a) Da der Zerfällungskörper von einem beliebigen Vielfachen $\lambda \cdot f$, $\lambda \in K$, ebenfalls L ist können wir o.E. annehmen, dass f normiert ist. Dann ist f das Minimalpolynom jeder seiner Nullstellen (da irreduzibel und normiert).

Nach A13 A3b ist $\{\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c)\} = \{a, b, c\}$ für $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ und a, b, c die Nullstellen von f (möglicherweise $\#\{a, b, c\} < 3$).

Da $\sigma \in \text{Aut}(L/K)$ durch die Bilder von a, b, c eindeutig bestimmt ist, folgt $\text{Aut}(L/K) \leq \text{Sym}(\{a, b, c\})$

also $\text{Aut}(L/K) \cong \{id\}$ oder $\cong S_2 = \mathbb{Z}/2$ oder $\cong \mathbb{Z}/3$ oder $\cong S_3$.
 Da $\deg(f) = 3$ ist enthält K keine der Nullstellen von f (sonst wäre es nicht irreduzibel!).

Aber $L \cong K(a)$, d.h. $[L:K] \geq [K(a):K] = 3$
 und $[L:K] = \#\text{Aut}(L/K)$. Also folgt
 $\text{Aut}(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ oder $\cong S_3$.

(b) Für $\text{Aut}(L/K) \cong S_3$ siehe Blatt 13 A2 (f).

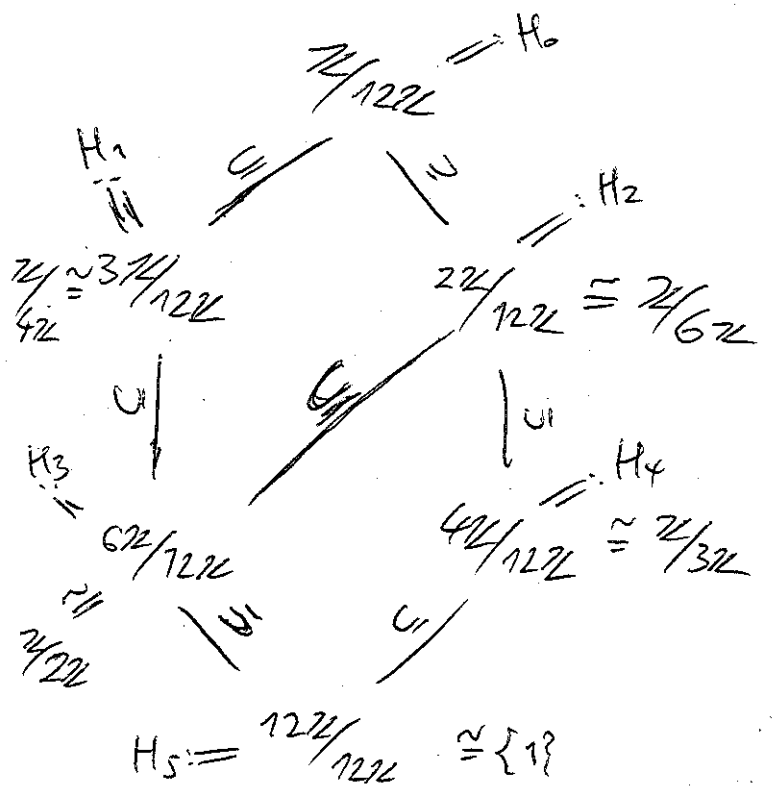
$f = x^3 + x + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ über $K = \mathbb{Q}$ heftet $\text{Aut}(L/K) \cong S_3$.

Wir können jetzt $H := \{\sigma \in \text{Aut}(L/K) \mid \sigma^3 = id\}$
 $= \left\{ \begin{matrix} \sigma_1: a_1 \mapsto a_2 \\ a_2 \mapsto a_3 \\ a_3 \mapsto a_1 \end{matrix}, \begin{matrix} \sigma_2: a_1 \mapsto a_3 \\ a_2 \mapsto a_1 \\ a_3 \mapsto a_2 \end{matrix}, id \right\}$
 $\cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

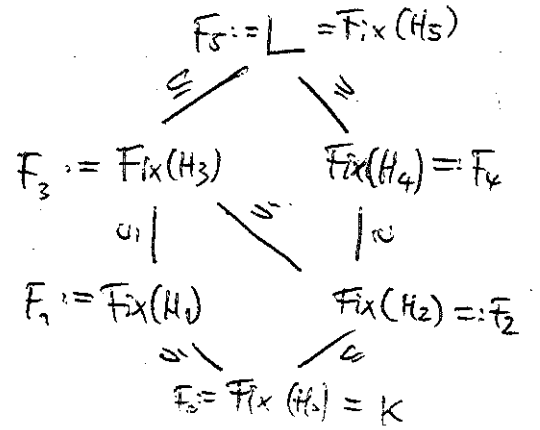
betrachten und $K' := \text{Fix}(H)$ setzen. Dann ist
 $\#\text{Gal}(L/K') = \#H = 3$ und L ist immer noch Zerfällungskörper von $f \in K'[X]$
 $\text{Gal}(L/\text{Fix}(H)) = H$
 Auch ist $f \in K'[X]$ irreduzibel, da $a_i \notin K'$ für $i = 1, 2, 3$ (sonst wäre $\sigma_i(a_i) = a_i$).

Explizit: Mit Bsp. 3.7.10. Sei $K = \mathbb{Q}(\zeta_3)$ und $b \in K$ ein Element mit $\sqrt[3]{b} \notin K$ (etwa $b = 2$), L der Zerfällungskörper von $x^3 - b$. Dann ist $[L:K] = 3$ und $S_3 \cong \text{Aut}(L/K) \neq \{id\}$ da $L \neq K$, also $\text{Aut}(L/K) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

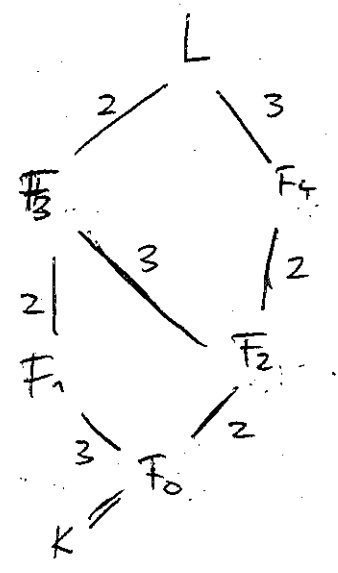
A3 Die Zwischenkörper entsprechen genau den Untergruppen von $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Dies sind:



Übersetzt in Zwischenkörper ergibt das



Dabei ist $[L:F_1] = \# \text{Gal}(L/F_1) = \# H_1$, dh



$[L:F_3] = 2$
 $[L:F_4] = 3 \Rightarrow [F_4:F_2] = 2$
 $[L:F_2] = 6 \Rightarrow [F_3:F_2] = 3$
 $[L:F_1] = 4 \Rightarrow [F_3:F_1] = 2$
 $[L:F_0] = [L:K] = 12$
 $\Rightarrow [F_1:F_0] = 3$
 und $[F_2:F_0] = 2$

A4 $\# \text{Gal}(L/K) = [L:K] = 90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

\Rightarrow Es gibt eine 3-Sylowgruppe $H \leq \text{Gal}(L/K)$ mit

$\# H = 3^2 = 9$

\Rightarrow Es gibt einen Zwischenkörper $F = \text{Fix}(H)$ mit

$[L:F] = \# \text{Aut}(L/F) = \# H = 9$, dh.

da L/F galoisch \uparrow $= \text{Aut}(L/\text{Fix}(H))$

$90 = [L:K] = \underbrace{[L:F]}_{=9} \cdot [F:K] \Rightarrow [F:K] = 10$

AS $G = \text{Gal}(L/K)$ hat 49 Elemente.

2. Fall: G ist abelsch. Dann ist $G \cong \mathbb{Z}/49$ oder $G \cong \mathbb{Z}/7 \times \mathbb{Z}/7$. In beide Fällen gibt es $H \leq G$ mit $\#H = 7$. Da G abelsch ist, ist $H \trianglelefteq G$.

2. Fall: G ist nicht abelsch. Nach 1.6.7 ist $Z(G) \neq \{1\}$, da G eine p -Gruppe ist ($p=7$). Nach Def. ist $Z(G) \neq G$, da G nicht abelsch. Also ist $H := Z(G) \leq G$ mit $\#H = 7$. Nach 1.6.5 ist $H \trianglelefteq G$.

In beiden Fällen gibt es also einen Normalteiler $H \trianglelefteq G$ mit $\#H = 7$.

Nach Satz 3.7.8 (c) ist $F = \text{Fix}(H)$ ein Zwischenkörper mit F/K normal und $[L:F] = \#H = 7$, also $[F:K] = 7$. (Da $49 = 7^2 = [L:K] = [L:F] \cdot [F:K]$)

Bem. Die obenstehende Lösung ist zwar korrekt, aber Fall 2 kann gar nicht auftreten. Bem.

Beh: Sei G eine Gruppe mit $\#G = p^2$, p prim. Dann ist G abelsch.

Bew. Nach 1.6.7 ist $Z(G) \neq \{1\}$. Also $\#Z(G) = p$ oder p^2 . Angenommen $\#Z(G) = p$. Dann gibt es $a \in Z(G)$ mit $\text{ord}(a) = p$ und $\langle a \rangle = Z(G)$. Wähle $b \in G \setminus Z(G)$. Ist $\text{ord}(b) = p^2$, so ist $\langle b \rangle = G$ zyklisch, also abelsch. Andernfalls ist $\text{ord}(b) = p$.

Nun ist $\varphi: \langle a \rangle \times \langle b \rangle \rightarrow \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \leq G$
 $(a^n, b^m) \mapsto a^n b^m$

Surj. ein Homom., da $ab = ba$, also $a^n b^m a^{n'} b^{m'} = a^{n+n'} b^{m+m'}$ gilt. Wegen $\#\langle a \rangle \times \langle b \rangle = p^2 = \#\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle$ (sonst wäre $\langle a \rangle \cdot \langle b \rangle \leq \langle a \rangle$ oder $\leq \langle b \rangle$, im Widerspruch zu $b \notin \langle a \rangle$)

folgt, dass φ ein Iso ist. Insbesondere ist G abelsch.