Algebra Blatt 2 Lösungsvorschlag

A1) (a) falsch. Ein Gegenbeispiel ist etwa $N_1 = \{e\} \subseteq G = N_2 \neq \{e\}$.

Dann ist $G/N_1 \cong G \ncong \{e\} \cong G/N_2$.

(b) falsch. Ein Gegenbeispiel ist etwa $G = \mathbb{Z}$, $N_1 = \{0\}$, $N_2 = 2\mathbb{Z}$.

Dann ist $G/N_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z} \cong G/N_1$, da das Element $1+2\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ die Ordnung 2 hat, aber es in $\mathbb{Z}$ keine Elemente der Ordnung 2 gibt (also auch keine Untergruppe mit zwei Elementen)

(c) falsch. Wenn $M = gN$ ist mit $g \notin N$, so kann $1 \in M$ nicht gelten, denn: $1 \in gN \Rightarrow g^{-1} \in N \Rightarrow g \in N$ ↯.

(d) wahr. Seien G, N, H wie in der Aufgabe, $U := \bigcup_{M \in H} M \subseteq G$

$a, b \in U$. Dann gibt es $M_1, M_2 \in H$ mit $a \in M_1$, $b \in M_2$.

Es ist $a \cdot b \in M_1 \cdot M_2 \in H$ und $a^{-1} \in M_1^{-1} \in H$, da H eine Untergruppe ist. ($U \neq \emptyset$ ist klar, etwa ist $1 \in N \in H$, also $1 \in U$.)

(e) wahr

Seien G, H Gruppen, $f: G \to H$ ein Homom., $H' \subseteq H$ eine Untergruppe

Setze $G' := f^{-1}(H')$. (Zunächst nicht notwendigerweise bijektiv)

Beh 1 G' ist eine Untergruppe von G.

Bew: $G' \neq \emptyset$ ist klar, da $f(1_G) = 1_H \in H'$, also $1_G \in G'$.

Seien $g, h \in G'$, d.h. $f(g) = f(h)$. Dann ist $f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h) \in H'$, da H' Ugr. und f Homom., also $g \cdot h \in f^{-1}(H') = G'$. Genauso: $f(g^{-1}) = f(g)^{-1} \in H'$, also $g^{-1} \in f^{-1}(H') = G'$.

Bem zu (a) und (b): Für $N_1 \neq N_2$ sind $G/N_1 = \{gN_1 \mid g \in G\}$ und $G/N_2 = \{gN_2 \mid g \in G\}$ in Wirklichkeit sogar disjunkt: Für $g, h \in H$ gilt $gN_1 = hN_2 \Rightarrow h^{-1}gN_1 = N_2 \ni 1 \Rightarrow 1 \in h^{-1}gN_1 \Rightarrow g^{-1}h \in N_1 \Rightarrow \underbrace{h^{-1}gN_1}_{=N_2} = N_1$. Wir zeigen oben also mehr als nötig!

Sei nun angenommen, dass f auch bijektiv ist. Dann gilt:

Beh 2: f induziert eine Bijektion $\tilde{f}: G/G' \longrightarrow H/H'$.

> **Beachte:** G', H' sind nicht unbedingt Normalteiler, dh G/G', H/H' nicht unbedingt Gruppen, insbesondere können wir nicht einfach den Isomorphiesatz verwenden. [**Übung:** Für den Fall, dass $H' \trianglelefteq H$ ist, zeige $G' \trianglelefteq G$ und dann die Beh 2 mithilfe des Isomorphiesatzes]

Bew: $\tilde{f}$ ist gegeben durch $gG' \longmapsto f(g)H'$. Wir müssen zeigen, dass das eine wohldefinierte Bijektion ist.

(*) **wohldefiniert:** Für $gG' = hG'$ (wobei $g, h \in G$) ist

$h^{-1}g \in G'$, also $f(h^{-1}g) \in H'$, dh. $f(h)^{-1} f(g) \in H'$

f Homomorphismus

bijektiv: Betrachte $f^{-1}: H \to G$, $h \mapsto f^{-1}(h)$, die Umkehrabb. zu f.

Nach (*) induziert f^{-1} eine Abbildung $\widetilde{f^{-1}}: H/H' \to G/G'$ (beachte, dass $H' = f(G') = (f^{-1})^{-1}(G')$), die durch $hH' \mapsto f^{-1}(h)G'$ gegeben ist. Damit ist $\widetilde{f^{-1}}$ eine

Umkehrabbildung zu $\tilde{f}$ (nachrechnen!), also ist $\tilde{f}$ bijektiv.

Es folgt $[G:G'] = \# G/G' = \# H/H' = [H:H']$.

Aufg. 2 G Gruppe; $H \leq G$ Untergruppe.

(a) Es gelte $aH = Ha$ für alle $a \in G$.

Sei $a \in G$ und $h \in H$. Dann ist $a \cdot h \in H \cdot a$, d.h. es gibt $g \in H$ mit $a \cdot h = g \cdot a$. Für dieses gilt $a \cdot h \cdot a^{-1} = g$, insbesond. $a \cdot h \cdot a^{-1} \in H$. Da $a \in G$ und $h \in H$ beliebig gewählt waren, folgt $aHa^{-1} \subseteq H$, d.h. H ist Normalteiler in G.

(b) Sei $[G : H] = 2$. Da $H \in G/H$ stets gilt, folgt

$\# G/H$ $\qquad G/H = \{H, gH\}$ für ein geeignetes $g \in G$.

Wir benutzen nun (a) um zu zeigen, dass $H \trianglelefteq G$ gilt:

Sei also $a \in G$ beliebig. Zeige: $aH = Ha$.

1. Fall: $a \in H$. Dann ist $a \cdot H = H = H \cdot a$.

nach Lem 1.3.3(c)

2. Fall: $a \notin H$. Dann ist $a \cdot H \neq H$, also $a \cdot H (= gH) = G \setminus H$,

und $H \cdot a \neq H$, also $H \cdot a = G \setminus H$ nach 1.3.3. (c)

$= a \cdot H$

Nach (a) folgt, dass H ein Normalteiler in G ist.

A3) (a) Wir müssen Wohldefiniert und "f ist ein Homom." zeigen.

Wohldef: Sei $aK = bK$, $a,b \in G$. D.h. $b^{-1}a \in K \subseteq H$, also $b^{-1}a \in H$, dh $aH = bH$. Also ist f wie angegeben wohldefiniert.

Homom: Seien $a,b \in G$. Es gilt: $f(aK \cdot bK) = f(abK) = abH$
$= aH \cdot bH = f(aK) \cdot f(bK)$.

(b) Dazu müssen wir $\ker(f)$ und $\operatorname{im}(f)$ bestimmen, denn der Isomorphiesatz liefert einen Iso $\tilde{f} : (G/K)/\ker(f) \longrightarrow \operatorname{im}(f)$.

$$\ker(f) = \{ aK \mid a \in G \text{ mit } \underbrace{f(aK)}_{= aH} = \underbrace{1_{G/H}}_{= H} \}$$
$$= \{ aK \mid a \in H \}$$
$$= H/K$$

$\operatorname{im}(f) = G/H$, denn f ist surjektiv: Für beliebiges $M \in G/H$ gibt es ein $g \in G$ mit $M = gH = f(gK)$, dh $gK \in G/K$ ist ein Urbild von M unter f.

$$\rightsquigarrow \tilde{f} : (G/K)/(H/K) \xrightarrow{\cong} G/H$$

A4)

(a) Nach Satz 1.3.10 (c) ist $\overline{a}^{\# \mathbb{F}_p^\times} = \overline{1}$.

Wegen $\# \mathbb{F}_p^\times = \#(\mathbb{F}_p \setminus \{0\}) = \# \mathbb{F}_p - 1 = p - 1$ sind wir damit schon fertig.

(b) Betrachte $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$

$$a \longmapsto a + p\mathbb{Z}$$

<u>Beh</u>: $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$

<u>Bew</u>: Nachrechnen:

$f(a \cdot b) = a \cdot b + p\mathbb{Z}$,

$f(a) \cdot f(b) = (a + p\mathbb{Z}) \cdot (b + p\mathbb{Z})$

$= a \cdot b + p\mathbb{Z}$ nach Def. der Multiplikation in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Insbesondere ist $f(a^p) = a^p + p\mathbb{Z} = (a + p\mathbb{Z})^p = \overline{a}^p = \underbrace{\overline{a}^{p-1}}_{= \overline{1}} \cdot \overline{a} = \overline{a}$

d.h. $a^p \equiv a \pmod p$ <u>für $\overline{a} \neq \overline{0}$</u>.

Für $\overline{a} = \overline{0}$, d.h. $a \equiv 0 \pmod p$, ist $a^p \equiv 0 \pmod p$, denn $p \mid a \Rightarrow p \mid a^p$.

Also gilt $a^p \equiv a \pmod p$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

A5

ⓐ Sei X die Menge an Eiern/Mehl/Zucker/Butter in g

(d.h. das Gewicht des Kuchens ist (höchstens, weil beim Backen Flüßigkeit verloren geht) $4 \cdot X$ g (plus Gewicht d. Backpulvers))

Dann müssen gemäß "Rezept"/Aufgabenstellung folgende Kongruenzen erfüllt sein:

$$X \equiv 250 \pmod{500} \quad \text{(für das Backpulver)}$$
$$X \equiv 0 \pmod{10} \quad \text{(für das Mehl)}$$
$$X \equiv 0 \pmod{15} \quad \text{(für Zucker und Butter)}$$
$$X \equiv 20 \pmod{55} \quad \text{(für die Eier.}$$

Zufälligerweise sind alle auftauchenden Zahlen durch 5 teilbar, sodass sich mit $Y = \frac{1}{5} X$ äquivalenterweise ergibt:

$$Y \equiv 50 \pmod{100} \quad (i)$$
$$[\,Y \equiv 0 \pmod{2} \quad (ii)\,]$$
$$Y \equiv 0 \pmod{3} \quad (iii)$$
$$Y \equiv 4 \pmod{11} \quad (iv)$$

Die Bedingung (ii) folgt dabei schon aus (i), ist also überflüssig!

Zu (i), (iii) und (iv) gibt es nach dem chin. Restsatz eine Lösung, da 100, 3 und 11 paarweise teilerfremd sind

ⓑ Es gibt (genau) ein $Y \in \mathbb{N}$, dass (i), (iii), (iv) erfüllt mit

$Y < 100 \cdot 3 \cdot 11 = 3300$.

Daraus ergibt sich $X < 5 \cdot 3300$ und für den fertigen Kuchen bzw

dessen Gewicht K (unter Vernachlässigung des Backpulvers)
folgt $K \leq 4 \cdot X < 20 \cdot 3300 = 66.000$. (in g)

Wegen $121 \cdot 600 > 110 \cdot 600 = 66000$ folgt die Beh.

*(c) zB. durch Ausprobieren; (und Vereinfachen):

$Y \equiv 50 \pmod{100}$ und $Y \equiv 0 \pmod 3$ sind genau dann gleichzeitig erfüllt, wenn $Y = 100a + 50 = 3b$ ist (für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$).
Eine Lösung ist offensichtlich $(a,b) = (1, 50)$ und alle Lösungen sind dann von ~~der~~ Form $(a,b) = (3n+1, 100n+50)$ für $n \in \mathbb{Z}$ (Warum?)
$\leadsto$ $Y = 300n + 150$ ist notwendig, damit Y eine Lösung für (i),(iii),(iv) ist (und hinreichend dafür, dass es eine Lösung von (i),(iii) ist!).
Wir müssen also jetzt noch die (oder ein) $n \in \mathbb{Z}$ finden mit

$$300n + 150 \equiv 4 \pmod{11}.$$

Wegen $-150 \equiv -40 \equiv 4 \pmod{11}$ ist $n = -1$ jedenfalls eine Lösung; wir erhalten dann alle Lösungen durch $n = -1 + 11m$, $m \in \mathbb{Z}$.
Die kleinste positive Lösung ist $n = 10$, d.h. $Y = 3150$.
$\leadsto$ $X = 5 \cdot 3150$, $K = 20 \cdot 3150 = 63000$ (in g).

(Auch wenn 16 Angemeldete keinen Appetit haben oder nicht zur Vorlesung gekommen sind könnte der Kuchen also komplett aufgegessen werden.)