Ag 16, BC

$\boxed{A1}$
$$\begin{pmatrix}0&6&2&-4\\-3&3&0&-3\\-3&6&1&-5\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ -2\end{array}
\xrightarrow[\boxed{S_1}]{\text{1. Sp ✓, zero ✓}}
\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}&+1&&-1\end{array}\\ \begin{pmatrix}-3&3&0&-3\\0&6&2&-4\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\end{array}
\xrightarrow[\boxed{T_1}]{\text{1. Zeil ✓, zero ✓}}
\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&6&2&-4\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ -2\cdot 3\\ \\ \end{array}
\xrightarrow[\boxed{S_2}]{\text{2. Sp ✓, zero ✓}}
\begin{array}{c}\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\\ \begin{array}{cccc}&-3\,3&&+2\,3\end{array}\end{array}$$

$$\xrightarrow[\boxed{T_2}]{\text{3. Sp ✓, zero ✓}}
\begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Noch anwenden der Matrizen für Elementarzeilen/spalten-operationen (S: Zeilen-op.., T: Spalten-op.)

$$SAT = S_2 S_1 A T_1 T_2 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&-1&1\end{pmatrix} A \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-3&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&6&2&-4\\-3&3&0&-3\\-3&6&1&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&0\\0&-3&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&3&0&-3\\0&0&0&0\\0&3&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&0\\0&-3&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

Wobei $S = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&2&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&0&0\\0&-3&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

Alg 2016, B

A 4 (a) Nach Satz 7.4.8 (Klassifikation endl. erz. ab. Gruppen), ist $|G| = 70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$,

so ist $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/70\mathbb{Z}$

(b) Nach Klassifikation, ist $|G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$

So ist $G \cong \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, \text{ oder} \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \times (\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}), \text{ oder} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, \text{ oder} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}, \text{ oder} \\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2, \text{ oder} \\ \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \end{cases}$

(c) Beh: G endl. ab., $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid |G|$ $\Rightarrow \exists a \in G$ mit $\operatorname{ord}(a) = p$

Bew: Nach der Klassifikation endl. erz. ab. Grp.,

$G \cong \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$

für geeignete $k \in \mathbb{N}$, $m_i = p_i^{n_i}$ wobei $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i \in \mathbb{P}$, $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Insbesondere, $|G| = \prod_{i=1}^{k} m_k$ also $p = p_j$

für (mindestens) ein $j \in \{1, \dots, k\}$.

Sei $\hat{a} := (0, \dots, 0, p^{n_j - 1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$

Es gilt $\operatorname{ord}(\hat{a}) = p$.

Wähle einen Isomorphismus $\varphi : G \to \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/m_k\mathbb{Z}$ und $a := \varphi^{-1}(\tilde{a})$.

Es gilt auch $\operatorname{ord}(a) = p$.

$\square$

Alg 2010, 03

A3 (a) <u>keine Operation</u> $(G=\mathbb{R}^\times, X=\mathbb{R}, \lambda_a(x)=a+x)$.

Für $G=(\mathbb{R}^\times, \cdot)$, $e_G = 1$.

Aber $\lambda_1(x) = 1+x \neq x$ für $x \in \mathbb{R}$

(Def 1.5.1 (a) nicht erfüllt)

(b) <u>keine Operation</u> $(G=\mathbb{Z}, X=\{0,1\}, \lambda_a(x)=0)$

Für $G=(\mathbb{Z},+)$, $e_G=0$.

Aber $\lambda_0(1) = 0 \neq 1$

Also ist Def 1.5.1 (a) nicht erfüllt

(c) $G=\mathbb{Z}, X=\{0,1\}, \lambda_a(x)=x$

<u>Ja</u>, definiert eine Operation von $\mathbb{Z}$ auf X.

<u>1.5.1(a)</u>: $\lambda_0(x) = x$. $\boxed{\checkmark}$

<u>1.5.1(b)</u>: $\lambda_{ab}(x) = x = \lambda_a(\lambda_b(x))$

für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ $\boxed{\checkmark}$

[Dies heißt die <u>triviale Operation</u> auf X].

(d) $G=S_3$, $X=\{1,2,3\}$, $\lambda_\sigma(x)=\sigma^{-1}(x)$

definiert <u>keine Operation</u> (von G auf X).

<u>Bew</u>: $\lambda_{\sigma\mu}(x) = (\sigma\mu)^{-1}(x) = \mu^{-1}\circ\sigma^{-1}(x)$

aber $\lambda_\sigma(\lambda_\mu(x)) = \lambda_\sigma(\mu^{-1}(x)) = \sigma^{-1}(\mu^{-1}(x))$

$= \sigma^{-1}\circ\mu^{-1}(x)$

Also, um konkret zu seen, nehme $\sigma=(12)\in S_3$

$\mu=(23)\in S_3$

$x = 1 \in X$.

Dann $\lambda_{(12)\cdot(23)}[1] = (23)^{-1}(12)^{-1}[1] = (23)(12)[1]$

$=(132)[1] = 3$.

aber $\lambda_{(12)}(\lambda_{(23)}[1]) = (12)^{-1}((23)^{-1}[1]) = (12)[1] = 2$.

Also ist Def 1.5.1(b) nicht erfüllt.

(e) $G=S_3$, $X=\{1,2,3\}$, $\lambda_\sigma(x)=4-\sigma(4-x)$.

Bemerke, $\lambda_e(x) = 4-e(4-x) = 4-(4-x) = x$ [Def 1.5.1(a) $\boxed{\checkmark}$]

Für alle $\varphi, \sigma \in S_3$, $x \in X$: $\lambda_\varphi(\lambda_\sigma[x]) = \lambda_\varphi(4-\sigma[4-x])$

[Def 1.5.1(a) $\boxed{\checkmark}$]

$= 4-\varphi[4-(4-\sigma[4-x])] = 4-\varphi(\sigma[4-x])$

$= \lambda_{\ldots}(x)$

Alg 2018. B3

A4 (a) Beh. $\mathbb{R}^\times \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Bew.: „$\supseteq$": klar.

„$\subseteq$": Für alle $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\times \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, es gibt $r \in \mathbb{R}^\times$ mit $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Also $a=b=0$, denn $r \neq 0$. ┘

Beh. $\mathbb{R}^\times \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}^\times\right\}$

Bew.: „$\supseteq$" Für jedes $\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}^\times$ gilt $a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$.

„$\subseteq$" Für alle $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\times \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ gibt es $r \in \mathbb{R}^\times$ mit $r\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Also $b=0$ und $a \in \mathbb{R}^\times$, denn $r \neq 0$. ┘

(b) Beh: $GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Bew. „$\supseteq$": klar.

„$\subseteq$": Für alle $v \in GL_2(\mathbb{R})\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ gibt es $A \in GL_2(\mathbb{R})$ mit $A^{-1}v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. Dann $v \in \ker(A^{-1})$. Also $v = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, da $A^{-1} \in GL_2(\mathbb{R})$. ┘

Beh: $GL_2(\mathbb{R}) \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Bew: „$\supseteq$" Sei $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Dann $\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, weil $\det\begin{pmatrix}a & -b\\b & a\end{pmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$.

„$\subseteq$": $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ für alle $A \in GL_2(\mathbb{R})$, weil $\ker(A) = \{0\}$ nach Def. von $GL_2(\mathbb{R})$. ┘