Aug wi6, B4

A1 (a) Falsch Gegenbeispiel:

Sei $G = C_2 = \langle a \rangle$ Dann $x 1 x^{-1} = a$
$\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
$\Rightarrow ax = x1 = 1x$
$\Rightarrow a = 1$ ↯

[Oder folgt aus (b)].

(b) Wahr

Bew Sei G eine Gruppe, und $x 1 x^{-1} = g$ mit $x, g \in G$.

Dann, $gx = x1 = 1x \Rightarrow g = 1$.

(c) Falsch Gegenbeispiel

Sei $G = S_3$. Nun, da $(12)(23) \neq (23)(12)$,
so sind $(12),(23) \notin Z(S_3) \subsetneq S_3$.
[Oder: Da S_3 nicht abelsch, $Z(S_3) \neq S_3$]
Aber S_3 ein Normalteiler von sich selbst.
mit $S_3 \not\subset Z(S_3)$

(d) Wahr

Beh: $H < Z(G) \Rightarrow H \triangleleft G$, für jede Gruppe G.

Bew: Da $H < Z(G) < G$, so ist $H < G$.
Für alle $h \in H, g \in G$,
$gh = hg$, weil $h \in Z(G)$.
Also $ghg^{-1} \in H$, $\forall h \in H, g \in G$.
$\Rightarrow gHg^{-1} \in H$, d.h. $H \triangleleft G$

(e) Wahr

Beh: $Z(Z(G)) = Z(G)$ für jede Gruppe G.

Bew: $Z(G)$ ist abelsch, weil
$yz = zy$ für jede $y \in Z(G)$, $z \in Z(G) \subset G$.

Nach Vorlesung $Z(A) = A$ für abelsche Gruppen A.

Aug wiß, ST

A2 <u>Beh</u>: $Z(GL_n(K)) = \{ r I_n \in K^\times \}$

<u>Bew</u>: „$\supseteq$" ist klar.

„$\subseteq$" Sei $A \in Z(GL_n(K))$, d.h.:

$$AG = GA \quad , \forall\, G \in GL_n(K)$$

Insbesondere, für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-ten Sp.

i-ten Zeile

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & -a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & -a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -a_{i1} & \cdots & -a_{ii} & \cdots & -a_{ni} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $a_{ki} = -a_{ki} = 0$
und $a_{ik} = -a_{ik} = 0$ für alle $k \neq i$, $i, k \in \{1, \dots, n\}$.

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Außerdem,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & 1 & & 0 \\ & 1 & \vdots & & \\ & & 1 & & \\ 1 & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & & 1 & \\ 0 & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i-ten Sp.

i-te Zeile

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & & a_{11} & & 0 \\ & a_{22} & \vdots & & \\ a_{ii} & \cdots & 0 & \cdots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ii} & & 0 \\ & a_{22} & \vdots & & \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $a_{ii} = a_{11}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$

D.h. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & a_{11} & \\ 0 & & a_{11} \end{pmatrix} \in \{ r I_n \in K^\times \}$.

□

A3 <u>Beh</u>: $\underbrace{\{Hg \mid g \in G\}}_{\text{Bahnen}} = \underbrace{\{Hg \mid g \in G\}}_{\text{R-Nebenklassen}}$

⌜<u>Bew</u>: Für jedes $g \in G$,

Die Bahn von g, $Hg \overset{\text{Def 1.5.5}}{=} \{hg \mid g \in G\} \overset{\text{Def 1.3.1}}{=} Hg$, die Rechtsnebenklasse von H, die g enthält.

⌟

Algebra, B4

A4 Beh.: [Angenommen $Gx = Gx'$. Es gibt ein $h \in G$ so dass $h(Sta_G(x))h^{-1} = Sta_G(x')$.

Bew.: $Sta_G(x) := \{g \in G \mid gx = x\}$

Da $Gx = Gx'$, gibt es $a \in G$ so dass $ax = x'$
$\Rightarrow x = a^{-1}x'$

Für jedes $g \in Sta_G(x)$, $agx = ax = x'$

$\Rightarrow aga^{-1}x' = x'$

$\Rightarrow aga^{-1} \in Sta_G(x')$

Also $a(Sta_G(x))a^{-1} \subseteq Sta_G(x')$. $\boxed{\text{„}\subseteq\text{"}}$

Analog $(a^{-1})(Sta_G(x'))(a^{-1})^{-1} \subseteq Sta_G(x)$.

Also $\underbrace{a(a^{-1}Sta_G(x')a)a^{-1}}_{= Sta_G(x')} \subseteq a(Sta_G(x))a^{-1}$ $\boxed{\text{„}\supseteq\text{"}}$

□

A5 Lemma 1: [Sei $a: x \mapsto -x$ und $b: x \mapsto 1-x$. Es gilt $D_\infty = \langle a, b \rangle$.

Bew.: „$\supseteq$": klar (1.1.14/1.1.15).

„$\subseteq$" Sei $f \in D_\infty$. Also $f: x \mapsto rx+s$, $\begin{cases} r \in \{\pm 1\} \\ s \in \mathbb{Z} \end{cases}$
$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Fall Ⓐ: $(r = -1)$

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $a \circ b(x) = a(1-x) = x-1$

Nach s mal, $(a \circ b)^s(x) = x - s$. Also $a \circ (a \circ b)^s(x) = -x - s$ ✓Ⓐ

Fall Ⓑ: $(r = 1)$

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $b \circ a(x) = b(-x) = x + 1$

Nach s mal, $(b \circ a)^s(x) = x + s$ ✓Ⓑ

Daher, entweder $f = \underbrace{a \circ (a \circ b)^s}_{\in \langle a,b \rangle}$ oder $f = (b \circ a)^s \in \langle a, b \rangle$

Lemma 2: [Sei $f \in D_\infty$, $f: x \mapsto rx + s$. Es gilt $f^{-1}: x \mapsto rx - rs$

Bew.: $\forall x \in \mathbb{Z}$, $f \circ \text{"}f^{-1}\text{"}(x) = f(rx - rs) = r^2x - r^2s + s$
$= x$, (da $r^2 = 1$).

Auch $\text{"}f^{-1}\text{"} \circ f(x) = \text{"}f^{-1}\text{"}(rx + s) = r^2x + rs - rs = x$

Also $f \circ \text{"}f^{-1}\text{"} = \text{"}f^{-1}\text{"} \circ f = id$.

Aug 2016, 1st

A4 (a) Sei $\alpha_{r,s}: x \longmapsto rx+s$, wobei $r \in \{\pm 1\}$, $s \in \mathbb{Z}$,

und $\beta: x \longmapsto ux+v$, wobei $u \in \{\pm 1\}$, $v \in \mathbb{Z}$.

$$\forall x \in \mathbb{Z},\ \beta \alpha_{r,s} \beta^{-1}(x) \overset{LZ}{=} \beta \alpha_{r,s}(ux-uv)$$
$$= \beta(rux - ruv + s)$$
$$= ru^2x - ru^2v + us + v$$
$$= rx - rv + us + v = \alpha_{r,\, us+(1-r)v}(x)$$

Wir wissen jetzt, dass für bestimmte r, s, jedes Konjugat von $\alpha_{r,s}$ die Form $\alpha_{r,*}$ hat.

Nun bestimmen wir die möglichen $*$.

Fall 1: $(r=1)$

$$* = us + (1-r)v = us \in \{\pm s\}$$

Also $[\alpha_{1,s}] = \{\alpha_{1,s}, \alpha_{1,-s}\}$ für jedes $s \in \mathbb{Z}$

Konjugationsklasse

[Bem: $id = \alpha_{1,0}$ und $[id] = \{id\} = [\alpha_{1,0}]$]

Fall 2: $(r=-1)$

$$* = us + (1-r)v = \underbrace{us + 2v}_{\text{gerade oder ungerade, abhängig von } s} \in (s + 2\mathbb{Z})$$

Also, für s gerade,

$$[\alpha_{-1,s}] = \{\alpha_{-1,2n} \mid n \in \mathbb{Z}\} = [\alpha_{-1,0}] = [a]$$

Für s ungerade,

$$[\alpha_{-1,s}] = \{\alpha_{-1,2n+1} \mid n \in \mathbb{Z}\} = [\alpha_{-1,1}] = [b].$$

Es gilt

$$D_\infty = [id] \,\dot\cup\, [a] \,\dot\cup\, [b] \,\dot\bigcup_{s \in \mathbb{N}_{>0}} \left(\{\alpha_{1,s}, \alpha_{1,-s}\}\right)$$

(b) Nach Satz 1.6.3 ist jeder Normalteiler eine Vereinigung von Konjugationsklassen, die auch eine Untergruppe ist.

Nun, $[id] = \{\alpha_{1,0}\} \leq D_\infty$, also $[id] \trianglelefteq D_\infty$.

Nach Lemma 1, $\langle [a] \cup [b] \rangle \supseteq \langle a, b \rangle = D_\infty$, und $D_\infty \trianglelefteq D_\infty$.

(*)

Bemerke, dass $D_\infty \geq \{\alpha_{1,s} \mid s\in\mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$. Sei $H := \{\alpha_{1,s} \mid s\in\mathbb{Z}\}$.

Für jedes $s\in\mathbb{N}_{>0}$,

$$\langle[\alpha_{1,s}]\rangle = \langle\{\alpha_{1,s},\alpha_{1,-s}\}\rangle = \langle\alpha_{1,s}\rangle = \{\alpha_{1,sk} \mid k\in\mathbb{Z}\} \cong s\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$$

$$\{\alpha_{1,sk} \mid k\in\mathbb{Z}\} = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \{\alpha_{1,sk},\alpha_{1,-sk}\}$$

Also $[id]\ \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}_{>0}}} \{\alpha_{1,sk},\alpha_{1,-sk}\} \underset{\neq}{\trianglelefteq} D_\infty$, für jedes $s\in\mathbb{N}_{>0}$.

Sei $H_s := [id] \bigcup_{k\in\mathbb{N}} [\alpha_{1,sk}] \underset{\neq}{\trianglelefteq} D_\infty$ wobei $s\in\mathbb{N}_{>0}$.

Außerdem, jede UG von $\{\alpha_{1,s} \mid s\in\mathbb{Z}\}$ hat die Form oben (Analog Beispiel 1.1.13).

Berechnen wir $\langle[b]\rangle$.

Sei $\alpha_{-1,2n+1}, \alpha_{-1,2m+1} \in [b]$, wobei $n,m\in\mathbb{Z}$.

Es gilt: $\alpha_{-1,2n+1}\circ\alpha_{-1,2m+1}(x) = \alpha_{-1,2n+1}(-x+2m+1)$

$$= x-2m-1+2n+1 = x+2(n-m) = \alpha_{1,2(n-m)}(x).$$

Also $\langle[b]\rangle \supseteq \left\langle [id]\cup[b]\ \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}_{>0}}} \{\alpha_{1,2k},\alpha_{1,-2k}\}\right\rangle$

$$= \langle H_2\cup[b]\rangle$$

Für $\alpha_{-1,2n+1}\in[b]$ und $\alpha_{1,2k}\in H_2$, gilt

$$\alpha_{-1,2n+1}\circ\alpha_{1,2k}(x) = \alpha_{-1,2n+1}(x+2k) = -x+2(n-k)+1 = \underbrace{\alpha_{-1,2(n-k)+1}(x)}_{\in[b]}.$$

$\Rightarrow \alpha_{-1,2n+1}\circ\alpha_{1,2k} \in [b]$.

Auch, $(\alpha_{-1,2n+1})^{-1} = \alpha_{-1,2n+1} \in [b]$.

Also
$\langle[b]\rangle = \langle H_2\cup[b]\rangle = H_2\cup[b] \lneq D_\infty$

Außerdem $\langle[b]\rangle = H_2\cup[b] \underset{\neq}{\trianglelefteq} D_\infty$.

Für $A\subset G$, sei $\langle\langle A\rangle\rangle :=$ kleinste Normalteiler von G, der A enthält.

Klar, dass $\langle\langle A\rangle\rangle \geq \langle A\rangle$.

Nun, für jedes $f\in D_\infty$, $\langle\langle [b], f\rangle\rangle = \langle[b],[f]\rangle$, nach Satz 1.6.3.

Insbesondere, für $\alpha\in[a]$, $\langle\langle[b],\alpha\rangle\rangle = \langle[b],[a]\rangle \overset{(*)}{\underset{L1}{=}} D_\infty$.

Für alle $\alpha_{1,2k+1}\in H\setminus H_2$,

$$\alpha_{1,2k+1}\circ b(x) = \alpha_{1,2k+1}(-x+1) = -x+2k+2 = \underbrace{\alpha_{-1,2(k+1)}(x)}_{\in[a]}$$

$\Rightarrow \langle\langle[b],\alpha_{1,2k+1}\rangle\rangle = \langle[b],[a]\rangle = D_\infty$

Wir kennen nun jeden NT von D_∞, der b enthält

Alg 2016, B4

<u>A4 (b) (ende).</u>

Analog für $[a]$. Erst berechnen wir $\langle\langle a\rangle\rangle = \langle [a]\rangle$.

Sei $\alpha_{-1,2n}, \alpha_{-1,2m} \in [a]$,

$$\alpha_{-1,2n}\circ\alpha_{-1,2m}(x) = \alpha_{-1,2n}(-x+2m) = x+2(n-m)$$
$$= \underbrace{\alpha_{1,2(n-m)}}_{\in H_2}(x)$$

Also $\langle [a]\rangle = \langle H_2 \cup [a]\rangle$

Aber $\alpha_{-1,2n}\circ\alpha_{1,2k}(x) = \alpha_{-1,2n}(x+2k) = -x+2(n-k)$
$$= \underbrace{\alpha_{-1,2(n-k)}}_{\in [a]}(x)$$

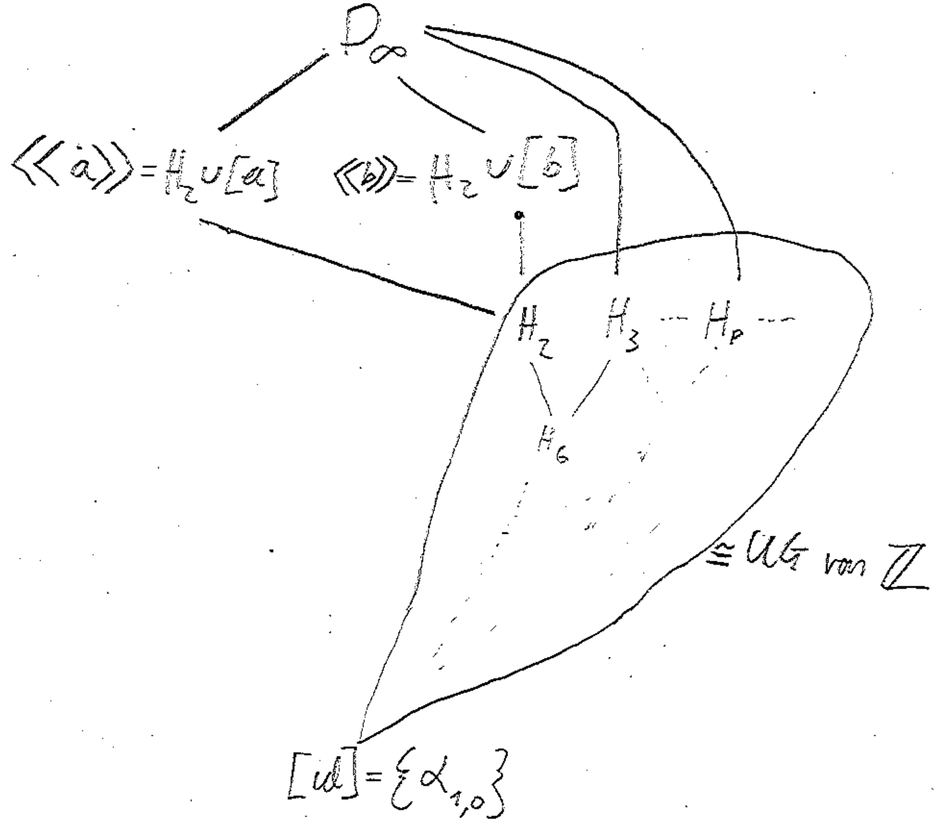
und $(\alpha_{-1,2n})^{-1} \overset{\text{ÜZ}}{=} \alpha_{-1,2n} \in [a]$.

Daher, $\langle\langle a\rangle\rangle = \langle [a]\rangle = H_2 \cup [a] \underset{\neq}{\trianglelefteq} D_\infty$

Für $\alpha_{1,2k+1} \in H \setminus H_2$,

$$\alpha_{1,2k+1}\circ a\,(x) = \alpha_{1,2k+1}(-x) = -x+2k+1 = \underbrace{\alpha_{-1,2k+1}}_{\in [b]}(x)$$

Also $\langle\langle a, \alpha_{1,2k+1}\rangle\rangle = \langle\langle a, b\rangle\rangle = \langle [a],[b]\rangle = D_\infty$,
für alle $k\in\mathbb{Z}$.



Hasse-Diagramm die Normalteiler von D_∞