Algebra – Blatt 5

A1) Nach Bem 1.8.c genügt es, die möglichen Zykellänge in der Zykelzerlegung zu betrachten. Die Konjugationsklassen sind also:

$[(1)] = \{(1)\}$

$[(12)] = \{(ab) \mid a,b \in \underbrace{M}_{\{1,\dots,5\}} \text{ p.w. versch.}\}$

$[(123)] = \{(abc) \mid a,b,c \in M \text{ p.w. versch.}\}$

$[(1234)] = \{(abcd) \mid a,b,c,d \in M \text{ p.w. versch.}\}$

$[(12345)] = \{(abcde) \mid a,b,c,d,e \in M \text{ p.w. versch.}\}$

$[(12)(345)] = \{(ab)(cde) \mid \dots\}$

$[(12)(34)] = \{(ab)(cd) \mid \dots\}$.

Für die Anzahlen der Elemente:

$\#[(1)] = 1$

$\#[(12)] = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$ Anzahl d. Möglichkeiten $a,b \in M$ p.w. versch. zu wählen. Beachte: $(ab) = (ba)$.

$\#[(123)] = \underbrace{\binom{5}{3}}_{=\binom{5}{2}=10} \cdot 2 = 20$ sind a,b,c gewählt, so gibt es die Möglichkeiten (abc), (acb).

$\#[(1234)] = \underbrace{\binom{5}{4}}_{=\binom{5}{1}=5} \cdot \underbrace{4!}_{\text{Reihenfolge}} \cdot \frac{1}{4} = 30$ $(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$

$\#[(12345)] = \underbrace{5!}_{\text{Reihenfolge}} \cdot \frac{1}{5} = 4! = 24$ $(12345) = \dots = (51234)$

$\#[(12)(345)] = \#[(123)] = 20$ Ist (cde) gewählt, haben wir keine Wahl mehr, da $(ab) = (ba)$.

$\#[(12)(34)] = \underbrace{\binom{5}{2}}_{a,b \text{ wählen}} \cdot \underbrace{\binom{3}{2}}_{c,d \text{ wählen}} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 15$ $(ab)(cd) = (cd)(ab)$

Kontrolle: $1 + 10 + 20 + 30 + 24 + 20 + 15 = 120 = 5! = \# S_5$

(Wir haben also beim Zählen der Elemente in den Konjugationsklassen entweder keinen Fehler gemacht oder mindestens zwei Fehler. ;-))

A2 a) <u>Beh:</u> $(x_1\, x_2 \cdots x_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3)\cdots(x_{k-1} x_k)$

<u>Bew:</u> (Induktion nach k).

Für $k=2$: $(x_1\, x_2) = (x_1\, x_2)$ klar. ✓

<u>Für $k>2$:</u> <u>Ind.ann.:</u> $(x_1 \cdots x_{k-1}) = (x_1 x_2)\cdots(x_{k-2}\, x_{k-1})$.

Es ist $\underbrace{(x_1 \cdots x_{k-1})}_{=(x_1 x_2)\cdots(x_{k-2} x_{k-1})}(x_{k-1}\, x_k) = (x_1 \cdots x_{k-1}\, x_k)$.

---

b) Sei $\tau = (x_1\, x_2)$. Es ist $(x_1\, x_2) = (x_2\, x_1)$, also können wir o.E. annehmen, dass $x_1 < x_2$ ist. Etwa $x_1 + d = x_2$, $d \in \mathbb{N}_{>0}$.

Wir zeigen die Beh per Induktion nach d.

<u>$d=1$.</u> Dann ist τ selbst eine Nachbartranspos ✓

<u>$d>1$.</u> <u>Ind.ann.:</u> $(x_1\, y)$ ist ein Produkt von Nachbartr. (wobei $y = x_1 + d - 1 = x_2 - 1$).

Es gilt $\tau = (x_1\, x_2) = \underbrace{(y\, x_2)}_{\text{Nachbartr.}}\underbrace{(x_1\, y)}_{\text{Produkt v. Nachbartr.}}\underbrace{(y\, x_2)}_{\text{Nachbartr.}}$

also ist auch τ ein Produkt von Nachbartransp.

c) Für die Nachbartr. $\tau_k = (k\ (k+1))$, $1 \le k \le n-1$ betrachte

$$\underbrace{(1\ 2 \cdots n)}_{=:\sigma}\tau_k\underbrace{(n \cdots 2\ 1)}_{=(1\ 2 \cdots n)^{-1}} = \sigma\tau_k\sigma^{-1}$$

<u>Beh:</u> $\sigma\tau_k\sigma^{-1} = \tau_{k+1}$ für alle $1 \le k \le n-2$.

<u>Bew:</u> $(\sigma\tau_k\sigma^{-1})(i) = ?$

<u>1. Fall:</u> <u>$i = k+1$.</u> Dann $\sigma\tau_k\sigma^{-1}(i) = \sigma\tau_k(\overset{k}{\overset{\shortparallel}{i-1}}) = \sigma(k+1) = k+2\ (= i+1)$

<u>2. Fall:</u> <u>$i = k+2$.</u> Dann $\sigma\tau_k\sigma^{-1}(i) = \sigma\tau_k(\overset{k+1}{\overset{\shortparallel}{i-1}}) = \sigma(k) = k+1\ (= i-1)$

<u>3. Fall:</u> $i \notin \{k+1, k+2\}$. Dann $\sigma\tau_k\sigma^{-1}(i) = \sigma\tau_k(i-1) = \sigma(i-1) = i$

(Lies „$i-1$“ $= n$ falls $i=1$)

Also $\sigma\tau_k\sigma^{-1}(i) = \tau_{k+1}(i)$ für alle $1 \le i \le n$, d.h. $\sigma\tau_k\sigma^{-1} = \tau_{k+1}$.

Wegen $\tau_1 = (1\,2) \in H := \langle (1\,2), \underbrace{(1\,2 \cdots n)}_{=\sigma} \rangle$ folgt $\tau_k \in H$ für alle $k \le n-1$, d.h. $H \supseteq \langle \tau_1, \dots, \tau_{n-1} \rangle \overset{\text{nach (a) und (b)}}{=} S_n$.

A3) a) Sei $\sigma = (x_1\ x_2\ \cdots\ x_{k\cdot m})$ ein Zykel der Länge $k\cdot m$.

Dann ist $\sigma^k(x_i) = x_{(i+k)_{km}}$ für $1 \leq i \leq km$

wobei $(i+k)_{km} \equiv i+k \pmod{km}$
$\{1, \ldots, km\}$

Setze $\sigma_1 := (x_1\ x_{1+k}\ \cdots\ x_{1+k(m-1)})$

$\sigma_2 := (x_2\ x_{2+k}\ \cdots\ x_{2+k(m-1)})$

$\vdots$

$\sigma_k := (x_k\ x_{k+k}\ \cdots\ \underbrace{x_{k+k(m-1)}}_{=km})$

Sind k Zykel der Länge m mit disjunkten Trägern; und wegen

$$\sigma_l(x_i) = \begin{cases} x_{i+k} & \text{für } i \equiv l \bmod k,\ i \leq k(m-1) \\ x_{i-k(m-1)} & i \equiv l \bmod k,\ i > k(m-1) \\ x_i & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle i, l

gilt $\sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \cdots \circ \sigma_k = \sigma$.

b) Beh: Für $n \geq 7$ und für $n = 5$ enthält S_n Elemente der Ordnung größer als n; für $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$ nicht.

Bew: 1) $\boxed{n \geq 7,\ n = 5}$ Sei $m = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n-1 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

Dann hat $\sigma = (1 2)(3 \cdots m) \in S_n$ die Ordnung $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{ord}((12)) \cdot \mathrm{ord}(3 \cdots m)$

da $\underset{\text{gilt immer}}{\sigma^k =} (12)^k (3 \cdots m)^k = id$ genau dann

gilt, wenn $k \equiv 0 \pmod{2}$
und $k \equiv 0 \pmod{\underbrace{\mathrm{ord}(3\cdots m)}_{= m-2}}$

Also $\mathrm{ord}(\sigma) = 2 \cdot (m-2)$
$= 2m - 4$

Für $n = 5$ ist $m = n$, also $\mathrm{ord}(\sigma) = 10 - 4 = 6 > 5$.

Für $n \geq 7$ ist $2m - 4 \geq 2(n-1) - 4 = 2n - 6$
$\geq n + 7 - 6$
$= n + 1 > n$.

2) $\boxed{n < 5, \text{ ~~oder~~ } n = 6}$:

Sei $\sigma \in S_n$. Für $S_1 = \{(1)\}$, $S_2 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist klar, dass $\mathrm{ord}(\sigma) \leq n$.

Für $n \geq 3$, schreibe σ als Produkt von Zykeln mit disj. Träger.

Dabei gibt es folgende Möglichkeiten:

$n=3$: $\underbrace{(ab)}_{\text{ord } 2}$, $\underbrace{(abc)}_{\text{ord } 3}$ $\rightsquigarrow \operatorname{ord}(\sigma) \leq 3$

$n=4$: (ab), (abc), $\underbrace{(ab)(cd)}_{\text{ord } 2}$, $\underbrace{(abcd)}_{\text{ord } 4}$ $\rightsquigarrow \operatorname{ord}(\sigma) \leq 4$

$n=6$: (ab), (abc), $(ab)(cd)$, $\underbrace{(abcd)}_{\text{ord } 4}$,

$\underbrace{(abcde)}_{\text{ord } 5}$, $\underbrace{(abcdef)}_{\text{ord } 6}$, $\underbrace{(ab)(cde)}_{\text{ord } 6}$, $\underbrace{(ab)(cdef)}_{\text{ord } 4}$,

$\underbrace{(abc)(def)}_{\text{ord } 3}$, $\underbrace{(ab)(cd)(ef)}_{\text{ord } 6}$ $\rightsquigarrow \operatorname{ord}(\sigma) \leq 6$

war nicht gefragt, hier nur der Vollständigkeit halber mit angegeben

A4) a) Sei $\sigma = (12)(34)$, $\tau = (13)(24)$.

Es ist $\sigma\tau = (12)(34)(13)(24)$
$= (14)(23)$ und

$\tau\sigma = (13)(24)(12)(34) = (14)(23)$.

Also ist $\{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$ schon eine Gruppe,

dh $V = \langle \sigma, \tau \rangle = \{id, \sigma, \tau, \sigma\tau\}$

$\boxed{\begin{array}{l} \sigma\tau \circ \sigma \\ = \tau\sigma\circ\sigma \\ = \tau, \\ \tau \circ \sigma\tau = \sigma \\ \text{(analog)} \end{array}}$

Insbesondere ist V abelsch und nach dem Klassifikation endl. erz. ab. Gruppen folgt $V \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ oder $V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Da jedes Element von V Ordnung ≤ 2 hat ist

$V \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(und $\varphi: V \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$

$\sigma \longmapsto (1,0)$
$\tau \longmapsto (0,1)$ ist ein Isomorphismus)

Alternativ kann man auch direkt nachrechnen, dass φ ein Iso ist – oder den Isomorphiesatz auf zB $\mathbb{Z}^2 \longrightarrow V$, $(k,l) \mapsto \sigma^k \tau^l$ anwenden.

b) Nach (a) ist $V = \{(ab)(cd) \mid a,b,c,d \in \{1,2,3,4\} \text{ pw. versch.}\} \cup \{id\}$

und nach 1.8.6 ist dies eine Vereinigung von Konjugationsklassen.

Nach 1.6.3 ist V also ein Normalteiler in S_4.

c) $S_4 \trianglerighteq A_4 \underset{\circledast}{\trianglerighteq} V \underset{\substack{\text{da } V \\ \text{abelsch}}}{\trianglerighteq} \langle \sigma \rangle \trianglerighteq \{id\}$.

$\langle \sigma \rangle = \{\sigma, \sigma^2\}$, $\sigma^2 = id$

$[S_4 : A_4] = 2$, also ist

$A_4 \trianglelefteq S_4$ nach Blatt 2 A2

(oder: $A_4 = \ker(sgn) \trianglelefteq S_4$
oder: nach 1.6.3)

$\circledast$ $sgn(V) = \{1\}$,
also $V \leq A_4$.
Mit $V \trianglelefteq S_4$ folgt $V \trianglelefteq A_4$.

mit $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, da $[S_4 : A_4] = 2$

$A_4/V \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $V/\langle\sigma\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \langle\sigma\rangle/\{id\}$

12 Elemente, 4 Elemente, 4 Elem., 2 Elem.

dh. alle Quotienten sind einfach und abelsch $\Rightarrow$ S_4 auflösbar.

d) $G = S_4$, $\quad$ $(G \trianglerighteq H' \trianglerighteq H$ nach (c))
$H' = V$
$H = \langle \sigma \rangle$ $\quad$ ist ein Beispiel:

Die Konj. klasse von σ ist nach 1.8.6 gerade $V \setminus \{id\}$, aber $H \not\supseteq V \setminus \{id\}$, d.h. H kann kein Normalteiler in G sein.

(nach 1.6.3.: $\left.\begin{array}{l} \sigma \in H, \\ H \text{ NT} \end{array}\right\} \Rightarrow$ Konj. klasse von σ ist Teilmenge von H)