Alg '18, B9

A1 (a) Wahr:

Bew: Sei $p_1/p_2 = \eta \in R^\times$

Da R faktoriell, $a = p_1^n a'$, mit $p_1 \nmid a'$, $n \in \mathbb{N}$. (*1)

$\Rightarrow \quad a = (\eta p_2)^n a' = p_2^n \eta^n a'$ (*2)

Bem. $\eta^n \in R^\times$, $p_2 \nmid a'$

Nach (*2): $v_{p_2}(a) = n$

Nach (*1): $v_{p_1}(a) = n$

(b) Wahr

Bew: Angenommen (mit PFZ)

$$a = e \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N},$$

$p_1, \dots, p_n \in R$ irreduzibel.

Aber, nach Voraussetzung $v_{p_1}(a) = \cdots = v_{p_n}(a) = 0$.

Also $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$

$\alpha_1 = v_{p_1}(a) = \cdots = \alpha_n = v_{p_n}(a) = 0$

$$\Rightarrow a = e \cdot p_1^0 \cdots p_n^0 = e \in R^\times$$

(c) Wahr

Bew: Angenommen $a \neq 0$ ein Quadrat und $b \in R$, mit $a = b^2$.

PFZ von $b \Rightarrow b = e\, p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$ für geeignete $e \in R^\times$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, p_i irr. und p.w. teilerfremd.

Also $a = b^2 = e^2 p_1^{2\alpha_1} \cdots p_n^{2\alpha_n}$

$\Rightarrow v_{p_i}(a) = 2\alpha_i$ für $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\}$

und $v_p(a) = 0$ für $p \notin \{p_1, \dots, p_n\}$

↑ In jeden Fall gerade.

[Ist $a = 0 = 0^2$, so ist $v_p(a) = v_p(0) = \infty$ für all irr. p. Warum nicht ∞ gerade.]

(d) Falsch. Gegenbeispiel.

Seien $R = \mathbb{Z}$, $a = -1$

Dann $v_p(-1) = 0$, aber -1 ist kein Quadrat.

Alg'18, B9

A2| (a) Nach dem Def. von FR(a) gibt es $\varepsilon, \varepsilon' \in R^\times$ und $q_1, \dots, q_r, q_{r+1}, \dots, q_m$ irr. s.d.

$$b = \varepsilon q_1 \cdots q_r \quad , \quad b' = \varepsilon' q_{r+1} \cdots q_m .$$

$\Rightarrow \; bb' = \varepsilon \varepsilon' q_1 \cdots q_r q_{r+1} \cdots q_m$

Voraussetzung ist $bb' = e p_1 \cdots p_k$.

Also nach dem Def von FR(b), gilt $m = k$ und gibt es $\sigma \in \mathrm{Sym}(k)$ s.d. $q_i / p_{\sigma(i)} \in R^\times$ für alle $i \in \{1, \dots, k\}$

Also ist $q_i = \varepsilon_i p_{\sigma(i)}$ für geeignete $\varepsilon_i \in R^\times$.

$\Rightarrow \; b = \varepsilon q_1 \cdots q_r = \varepsilon \varepsilon_1 p_{\sigma(1)} \cdots \varepsilon_r p_{\sigma(r)} = \boxed{\varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r p_{\sigma(1)} \cdots p_{\sigma(r)}}$

und $b' = \varepsilon' \varepsilon_{r+1} \cdots \varepsilon_k \, p_{\sigma(r+1)} \cdots p_{\sigma(k)}$

Da $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ Einheiten sind, gilt

$e' := \varepsilon \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_r \in R^\times$ und $e'' := \varepsilon' \varepsilon_{r+1} \cdots \varepsilon_k \in R^\times$.

Setze $I := \sigma(\{1, \dots, r\})$ ein.

Also $b = e' \prod_{i \in I} p_i$ und $b' = e'' \prod_{i \in \{1, \dots, k\} \setminus I} p_i$

(b) Angenommen $a \notin R^\times$. Sei $c \,|\, a$ mit $c \,|\, bb'$. Angenommen $c \notin R^\times$, dann gibt es p irr. mit $p \,|\, c$. Also $p \,|\, bb' \overset{PFZ}{=} e p_1 \cdots p_k$ mit $e \in R^\times$, p_i irr.,

Nach Eindeutigkeit der PFZ, O.E. $p = p_i$, $i \in \{1, \dots, k\}$.

Nach A2(a), gilt $p \,|\, b$ oder $p \,|\, b'$. ↯ a, b und a, b' teilerfremd

A3| Sei $a \in R \setminus \{0\}$ mit $R/(a)$ ein Integritätsbereich.

Angenommen a ist nicht irreduzibel.

Also gibt es p irreduzibel und $a' \notin R^\times$ mit $a = p \cdot a'$. Nach PFZ ist $p, a' \notin (a)$.

Also sind p, a' nicht-null in $R/(a)$.

Aber $p \cdot a' = a \in (a) \Rightarrow p \cdot a' = \bar{0} \in R/(a)$.

D.h. p, a' sind Nullteiler ↯

D4 Alg '18

A 4| (a) Eisenstein mit $p = 3$.

(b) $f_2 = 5(X^5+5)$

(X^5+5) ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$

nach Eisenstein mit $p=5$.

(c) Nach Hinweis betrachte

$$g(X) := X^4 f_3(X^{-1}) = 4X^4 + 18X^3 + 3.$$

$g(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ nach Eisenstein mit $p = 3$.

$\circledast$ Angenommen $h_1, h_2 \in R[X] \setminus R$ mit

$f_3 = h_1 \cdot h_2$. Also $\deg h_1 + \deg h_2 = \deg f_3 = 4$.

$\Rightarrow f_3[X^{-1}] \cdot X^4 = h_1(X^{-1}) \cdot h_2(X^{-1}) \cdot X^4$

$$\Rightarrow \quad g(x) = \underbrace{\left(h_1(X^{-1}) \cdot X^{\deg h_1}\right)}_{\in R[X] \setminus R} \cdot \underbrace{\left(h_2(X^{-1})\, X^{\deg h_2}\right)}_{\in R[X] \setminus R}.$$

$\Rightarrow$ ↯ $g(x)$ irreduzibel. ... Also ist auch f_3 irr.

A5 Seien $f, g \in K[X]$ mit $f \cdot g \in R[X]$. Nach Satz 2.7.3 ist

$$v_p^*(fg) = v_p^*(f) + v_p^*(g) \quad (*)$$

für jedes irreduzible $p \in R$ und nach Def. von v_p^* ist

$$v_p^*(\underbrace{fg}_{=\sum_{i=0}^{k} c_i X^i \in R[X]}) = \min\{\underbrace{v_p(c_i)}_{\geq 0}\} \geq 0$$

für alle i, da $c_i \in R$ (Nach Satz 2.6.3.)

Da f, g normiert sind ist $v_p^*(f) = \min\{\underbrace{v_p(1)}_{=0}, \dots\} \leq 0$ und $v_p^*(g) \leq 0$, also nach $(*)$ auch

$$0 \geq v_p^*(f) = \underbrace{v_p^*(fg)}_{\geq 0} - \underbrace{v_p^*(g)}_{\leq 0} \geq 0, \text{ d.h.}$$

$v_p^*(f) = 0$ und analog $v_p^*(g) = 0$.

Es folgt $v_p^*(a_i) \geq 0$ für $f = \sum a_i X^i$, also $a_i \in R$, d.h. $f \in R[X]$. Analog auch $g \in R[X]$.