Algebra – Aufgaben im Klausurstil – Lösungsideen

> Dies sind keine vollständigen Lösungen zu den Aufgaben, sondern nur stichpunktartige Ansätze und Ideen zur Vorgehensweise!

A1 Nein, $ab \mapsto -ab \neq (-a)(-b)$. $(a \mapsto -a,\ b \mapsto -b)$.

A2 zykl. Gr.: $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$
Erzeuger 1 bzw. $n + m\mathbb{Z}$ mit n teilerfremd zu m.
$\{1^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \neq \mathbb{Z}$, $\{(n+m\mathbb{Z})^k \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

A3 $\langle A \rangle = \mathbb{Q}_{>0}$. "$\supseteq$" muss gelten, da $n, \frac{1}{m} \in \langle A \rangle$
"$\subseteq$" da $\mathbb{Q}_{>0}$ Ugr. die A enthält

A4 (a) Wahr, $g(N_1 \cap N_2)g^{-1} \overset{\text{(Warum?)}}{=} gN_1g^{-1} \cap gN_2g^{-1} = N_1 \cap N_2$
(b) Falsch. $N_1 \cup N_2$ muss nicht mal Ugr. sein. Etwa $G = \mathbb{Z}$, $N_1 = 2\mathbb{Z}$, $N_2 = 3\mathbb{Z}$. $2+3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$.

A5 $\langle N_1 \cup N_2 \rangle = \bigcap\limits_{\substack{A \leq G \\ N_1 \cup N_2 \subseteq A}} A$.

$$g\langle N_1 \cup N_2 \rangle g^{-1} = g \cdot \bigcap A \cdot g^{-1} \overset{\text{(Warum?!)}}{=} \bigcap gAg^{-1} \supseteq \bigcap_{\substack{B \leq G \\ N_1 \cup N_2 \subseteq B}} B = \langle N_1 \cup N_2 \rangle,$$

also $\langle N_1 \cup N_2 \rangle$ Normalteiler.

da $gAg^{-1} \leq G$ mit $N_1 \cup N_2 \subseteq gAg^{-1}$

A6 (a) $a \in N_1 \cap N_2 \Rightarrow \operatorname{ord}(a) \mid \# N_i$ für $i = 1,2$
$\Rightarrow \operatorname{ord}(a) = 1$, da $\# N_1, \# N_2$ teilerfremd
$\Rightarrow a = 1$; also insgesamt $N_1 \cap N_2 = \{1\}$.

(b) $\ker(N_1 \to G/N_2) = N_1 \cap N_2 = \{1\}$, also injektiv. $\# G/N_2 = \frac{\# G}{\# N_2} = \# N_1$, also auch surjektiv.

(c) $g \in G$. Nach (b) gibt es (genau ein) $h \in N_1$ mit $hN_2 = gN_2$. Also $ha = gb$ für $a, b \in N_2$ geeignet, d.h. $g = \underbrace{h}_{\in N_1} \underbrace{ab^{-1}}_{\in N_2}$.

(d) $\varphi: N_1 \times N_2 \to G$, $(a,b) \mapsto a \cdot b$ ist Isomorphismus (Warum?!)

[Benutze (c) und $aba^{-1}b^{-1} \in N_1 \cap N_2$ da N.T.]

A7 (a) $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Nein; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & & \\ a & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \notin H$.

A8 $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow m \cdot \varphi\left(\frac{1}{m}\right) = n$,

also $\varphi\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{n}{m}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z}$ $\Rightarrow n = 0$.

A9 $120 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. $\mathbb{Z}/2^3 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/5$

$\mathbb{Z}/2^2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3^2 \times \mathbb{Z}/5$

$\mathbb{Z}/2^3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5$

$\mathbb{Z}/2^2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5$

A10 Ja, nach Klassif. endl. ab. Grp beide isomorph zu

$\mathbb{Z}/2^3 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/5$.

A11 Nein, nach Klassif.

oder: Da $\mathbb{Z}/36 \times \mathbb{Z}/6$ kein Elt der Ordnung 8 enthält (warum?), $\mathbb{Z}/8 \times \mathbb{Z}/27$ aber schon (welches?)

A12 $a^{-1} = a$ für alle $a \in G$, d.h.

$a b a^{-1} b^{-1} = abab = (ab)^2 = 1$, also

$ab = ba$ für alle $a, b \in G$.

A13 (a) zB $(\mathbb{C}^\times, \cdot) \times (\mathbb{C}^\times, \cdot)$, $a = (-1, 1)$, $b = (1, -1)$

oder $(\mathbb{R}^\times, \cdot) \times (\mathbb{R}^\times, \cdot)$ — " — oder...

(b) $(\mathbb{C}^\times, \cdot)$, $a = 2i$, $b = -2i$ oder ....

(c) $G = \langle c \rangle$. Dann $a = c^n$, $b = c^m$

mit $n, m < \#G$.

1.Fall: $G = \mathbb{Z}$ (d.h. $\#G = \infty$) "Klar"

2.Fall: $G = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ($\#G = k$).

$a^2 = b^2 \Rightarrow c^{2n} = c^{2m}$

$\Rightarrow 2n \equiv 2m \pmod{k}$

$\Rightarrow n = m$ (da $n, m < k$)

A14 (a) $\sigma = (134)(25)$

(b) Sechs, da $\operatorname{ord}(\sigma) = 6$.

$$\langle \sigma \rangle = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6 = id\}$$

$$= \{\underbrace{(134)(25)}_{\sigma}, \underbrace{(143)}_{\sigma^2}, \underbrace{(25)}_{\sigma^3}, \underbrace{(134)}_{\sigma^4}, \underbrace{(143)(25)}_{\sigma^5}, \underbrace{(1)}_{\sigma^6}\}$$

(c) $\to$ σ^5 ist zu σ konjugiert, die andren σ^k nicht. (konjugiert $\Leftrightarrow$ "gleiche Form" als Produkt v. Zykeln)

A15 $ga^n g^{-1} = (gag^{-1})^n$ (warum?), also

$$g\langle a\rangle g^{-1} = \{ga^n g^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\} = \{(\underbrace{gag^{-1}}_{=b\ (*)})^n \mid n \in \mathbb{N}\} = \langle b \rangle$$

$(*)$ für geeignetes $g \in G$.

A16 $X = \{\{id\}, \langle(12)\rangle, \langle(23)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(123)\rangle, S_3\}$, $\langle(123)\rangle = \langle(132)\rangle$

$\{\{id\}\}$ und $\{S_3\}$ sind Bahnen, da "zueinander konjugiert sein" $\Rightarrow$ "gleiche Form" als Produkt v. Zykeln. $\{\langle(12)\rangle, \langle(13)\rangle, \langle(23)\rangle\}$ und $\{\langle(123)\rangle\}$ sind die andren Bahnen (gleiches Argument und $(23)\langle(12)\rangle(23) = \langle(13)\rangle$, $(13)\langle(12)\rangle(13) = \langle(23)\rangle$.)

A17 (a) $\lambda_1(bH) = bH$, $\lambda_a(\lambda_b(cH)) = abcH = \lambda_{ab}(cH)$.

(b) Ja. Für $a, b \in G$ ist $\lambda_c(aH) = caH = bH$ für $c := ba^{-1} \in G$.

(c) $\operatorname{Stab}_G(bH) = \{a \in G \mid \underbrace{abH = bH}_{\Updownarrow}\}$

$$= \{a \in G \mid b^{-1}ab \in H\} = bHb^{-1}$$

$\boxed{\text{A18: nächste Seite}}$

A19 (a) wie A7(a).

(b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 1+a \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{R}\right\}$

$= \left\{\begin{pmatrix} b \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{R}\right\}$ ist die Bahn von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

A18 (a) Klar; das Produkt von zwei solche bildet wieder $\{4,5\}$ auf sich ab; Inverses auch.

(b) Nein, $(45) \in H$, aber $(14)(45)(14)$
$= (15) \notin H$

$\boxed{\text{A19: vorherige Seite}}$

A20

$$H = \langle (123)(45) \rangle$$

A21 Die Bahnlänge teilt die Gruppenordnung $\#G$.
Wäre die Bahn von $x \in G \setminus \{1\}$ ganz $G \setminus \{1\}$,
so müsste also $\underbrace{\# G \setminus \{1\}}_{\overset{\shortparallel}{n-1}} \mid \underbrace{\# G}_{\overset{\shortparallel}{n}}$ gelten,
d.h. $n = 2$.

A22 $\mu_1(x, x') = (\lambda_1(x), \lambda_1(x')) = (x, x')$

$$\mu_a \mu_b (x, x') = \mu_a(\lambda_b(x), \lambda_b(x'))$$
$$= (\lambda_a \lambda_b(x), \lambda_a \lambda_b(x'))$$
$$= (\lambda_{ab}(x), \lambda_{ab}(x'))$$
$$= \mu_{ab}(x, x')$$

A23 $S_4 \cdot (1,1) = \{(i,i) \mid i \in \{1,2,3,4\}\}$

$S_4 \cdot (1,2) = \{(i,j) \mid i \neq j,\ i,j \in \{1,2,3,4\}\}$.

A24 $\lambda_{\sigma\tau}(x) = \sigma\tau\sigma\tau(x) \underset{\text{iA}}{\neq} \sigma^2\tau^2(x)$
$= \lambda_\sigma \lambda_\tau (x)$

(für z.B. $\sigma = (12)$, $\tau = (23)$
ist $(\sigma\tau)^2 = (123)^2 = (132)$,
aber $\sigma^2\tau^2 = id$.)

A25 Sei $\varphi \in Hom(G, G') \setminus \{\mathbb{1}\}$, $\mathbb{1}: G \to G'$, $g \mapsto 1$
$ker(\varphi)$ ist Normalteiler von G, also
$ker(\varphi) = \{1\}$ ($= G$ nicht mögl. da $\varphi \neq \mathbb{1}$),
d.h. φ ist injektiv. Also $G \cong im(\varphi) \leq G'$.

A26 siehe Blatt 14 A5, letzte Seite des Lösungsvorschlags.

A27 (a) $125 = 5^3 \mid 15!$, aber $5^4 \nmid 15!$

$$\left(15! = \underbrace{1 \cdots 4}_{} \cdot 5 \cdot \underbrace{6 \cdots 9}_{} \cdot 10 \cdot \underbrace{11 \cdots 14}_{} \cdot 15\right)$$

nicht durch 5 teilbar

$$G = \{(12345)^i (6\,7\,8\,9\,10)^j (11 \cdots 15)^k \mid i,j,k \in \{1,2,3,4,5\}\}$$

ist Ugr von S_{15} mit 5^3 Elementen, also 5-Sylow-Gruppe

(b) $G \cong \langle (12345) \rangle \times \langle (678910) \rangle \times \langle (11 \cdots 15) \rangle$ ist abelsch als dir. Produkt von abelschen Gruppen

Jede 5-Sylow-Gr. ist konjugiert zu G, also auch abelsch.

A28 $s_5 :=$ Anzahl der 5-Sylow-Gr. $(700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7)$

$s_5 \equiv 1 \pmod 5$, $\quad s_5 \mid \underbrace{2^2 \cdot 7}_{} = 28$

Teiler: 1, 2, 4, 7, 14, 28

$\Rightarrow s_5 = 1$.

Also gibt es nur eine 5-Syl.-Gr., diese muss dann Normalteiler sein.

A29 $405 = 3^4 \cdot 5$, $\quad s_3 \equiv 1 \pmod 3$, $s_3 \mid 5 \quad \Rightarrow s_3 = 1$.

$N =$ einzige 3-Syl.-Gr. ist Normalteiler, $\# G/N = 5$, also $G/N \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ abelsch.

N ist p-Gruppe, also auflösbar.

$\rightsquigarrow G \trianglerighteq N \trianglerighteq \cdots$ Komp.-reihe mit abelschen Quotienten.

A30 1, 5, 7, 11 (alle zu 12 teilerfremden Zahlen in $\{1, 2, \ldots, 12\}$)

A31 (a) $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{wenn } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 1 \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$

$f \cdot g = 0$, aber $f \neq 0 \neq g$.

(b) $(\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}) = \{ f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}) \mid f(0) = 0 \}$.

(Für $f \in$ ist $\tilde{f} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Q}} = f$, daher "$\supseteq$".

"$\subseteq$" ist klar, da $(g \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Q}})(0) = 0$ für alle g.)

$\boxed{\text{mit } \tilde{f}(x) = \frac{1}{x}f(x) \text{ (für } x \neq 0\text{)}, \ \tilde{f}(0) = 0}$

A32 $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}^{\,2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{25})$

($X^2 - \sqrt[3]{5}^{\,2}$ ist MiPo von $\sqrt[3]{5}$ über K, daher Grad 2)

A33 $[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}(a)] = 2$, ist a transz über $\mathbb{Q}$, so ist $[\mathbb{Q}(\sqrt{a}) : \mathbb{Q}] = 2 \cdot \underbrace{\boxed{[\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}]}}_{=\infty} = \infty$,

also $\sqrt{a}$ transzendent über $\mathbb{Q}$.

A34. Ähnlich wie A33 oder: a^2 alg $\Rightarrow a$ alg, da für $f = \mathrm{MiPo}_{a^2/\mathbb{Q}}$ gilt, dass $f(X^2) =: g(X)$ ein Polyn. mit $g(a) = 0$ ist.

A35 $a \in L \setminus K$. Dann $L = K(a)$, und $L \overset{\circledast}{=}$ Zerfällungskörper des MiPo von a über K, also normal.

$\circledast$: z.B. Polynomdivision/eukl. Algorithmus: $\mathrm{MiPo}_{a/K}(X) \in L[X]$, $(X-a) \in L[X]$

$= (X-a)(X-b) \Rightarrow b \in L$

A36 (a) $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ ist galoisch,

$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4$ (warum?)

hat nur eine Untergruppe mit zwei Elementen, nach Galois-Korrespondenz also existiert nur ein $L \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_5)$ mit $[L:\mathbb{Q}] = 2$.

(b) Wenn nicht wäre f in $L[X]$ irreduzibel oder hätte eine Nullstelle in L; Ersteres geht nicht, weil dann $f = \mathrm{MiPo}_{\zeta_5/L}$, also $[\mathbb{Q}(\zeta_5):L] = [\mathbb{Q}(\zeta_5):\mathbb{Q}]$, Zweiteres geht nicht, weil dann $L = \mathbb{Q}(\zeta_5)$.

A37 (a) Ja, ist Zerfällungskörper von X^2+1.

(b) id und Konjugation: $a+bi \mapsto a-bi$.

(c) Nein. $K \supseteq \mathbb{R}$ alg $\Rightarrow K \hookrightarrow \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{C} \supseteq \underbrace{K \supseteq \mathbb{R}}$

$\Rightarrow [K:\mathbb{R}] \le 2$

A38

$$\tau(b) = \tau\Big(\sum_\sigma \sigma(a)\Big) \qquad \text{für alle } \tau \in \mathrm{Aut}(L/K)$$

$$= \sum_\sigma \tau(\sigma(a)) = \sum_\sigma \tau\sigma(a)$$

$$= \sum_\sigma \sigma(a) = b, \text{ d.h. } b \in \mathrm{Fix}(\mathrm{Aut}(L/K)) = K.$$

da $\{\tau\sigma \mid \sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)\} = \{\sigma' \mid \sigma' \in \mathrm{Aut}(L/K)\}$

("$\subseteq$" klar, "$\supseteq$": $\sigma' = \tau\sigma$ für $\sigma = \tau^{-1}\sigma'$)

A39

$$\begin{tikzcd}
 & \{id\} \arrow[dl, dash, "\cong \mathbb{Z}/3"'] \arrow[dr, dash, "\cong \mathbb{Z}/2"] & \\
2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[dr, dash] & & 3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \arrow[dl, dash] \\
 & \mathbb{Z}/6 &
\end{tikzcd}
\rightsquigarrow
\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dash, "3"'] \arrow[dr, dash, "2"] & \\
F_1 \arrow[dr, dash, "2"'] & & F_2 \arrow[dl, dash, "3"] \\
 & K &
\end{tikzcd}$$