Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

Klausur Algebra

Sommersemester 2017

04.08.2017

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Unterschrift: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.
- Es sind zur Klausur außer geeignetem Schreibgerät keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 $(7 + 9 + 9 = 25$ *Punkte*)

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Jede endliche Gruppe G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$ vom Grad $n = \|G\|$.
☐	☐	Der Ring $R = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ besitzt neben $\{0\}$ und R keine weiteren (beidseitigen) Ideale.
☐	☐	Für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt stets: $\mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ als Ringe.
☐	☐	In einer regulären kommutativen Halbgruppe mit Eins ist jedes Primelement bereits unzerlegbar.
☐	☐	Jede einfache Körpererweiterung ist algebraisch.
☐	☐	Als Punkt der komplexen Zahlenebene läßt sich $\sqrt[5]{2}$ mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruieren.
☐	☐	Ist $L \mid K$ eine galoissche Körpererweiterung vom Grad 9, so ist die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L \mid K)$ abelsch.

Bitte bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenteile auf einem separaten Blatt:

(b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Polynome in dem jeweils angegebenen Ring irreduzibel sind, und begründen Sie kurz Ihre Antwort:

(i) $f = \frac{11}{25}X^5 + \frac{3}{5}X^3 + 2X^2 - \frac{1}{5} \in \mathbb{Q}[X]$.

(ii) $g = X^3 + 16X^2 - 1 \in \mathbb{F}_{17}[X]$.

(iii) $h = X^4 + 3X^3 - 2X^2 - 4X + 5 \in \mathbb{Q}[X]$.

(c) Bestimmen Sie die Minimalpolynome der folgenden komplexen Zahlen über dem jeweils angegebenen Körper und begründen Sie kurz Ihre Antwort:

(i) $\alpha = \sqrt{2} + i$ über $\mathbb{Q}$.

(ii) $\omega = e^{2\pi i/8}$ über $\mathbb{Q}$.

(iii) $\omega = e^{2\pi i/8}$ über $\mathbb{R}$.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 $(10 + 10 + 5 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, und betrachten Sie in $\mathrm{Sym}(n)$ die Permutationen

$$\pi = (\,1\ 2\ \ldots\ n\,) \quad \text{und} \quad \tau = (\,1\ 2\,).$$

Zeigen Sie, per Induktion nach n oder auf andere Weise:

$$\mathrm{Sym}(n) = \langle \pi, \tau \rangle.$$

(b) Seien p, q Primzahlen mit $p > q$ und $q \nmid (p-1)$. Sei G eine Gruppe der Ordnung pq.

Zeigen Sie, unter Verwendung der Sylowschen Sätze oder auf andere Weise, daß G abelsch ist.

(In Wahrheit ist G dann bereits zyklisch, aber das müssen Sie nicht mehr zusätzlich ausführen.)

(c) Bestimmen Sie eine Gruppe der Ordnung 21, die nicht abelsch ist.

Tipp: Sie können eine solche Gruppe zum Beispiel als Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$ konkret angeben.

Aufgabe 3 $(4 + 8 + 6 + 7 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Geben Sie die Definition für einen euklidischen Ring an.

(b) Zeigen Sie, direkt durch Nachweis der definierenden Eigenschaften, daß der Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen gaußschen Zahlen euklidisch ist.

(c) Formulieren Sie das Eisensteinsche Irreduzibilitätskriterium für Polynome über $\mathbb{Q}$ und illustrieren Sie das Kriterium durch Angabe eines geeigneten Beispielpolynoms vom Grad 10.

(d) Zeigen Sie: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert wenigstens ein Erweiterungskörper L von $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ mit $[L : K] = n$.

bitte wenden!

Aufgabe 4 ($4 + 6 + 10 + 5 = 25$ *Punkte*)

(a) Zeigen Sie: Ist K ein endlicher Körper, so gilt $|K| = p^m$ für eine Primzahl p und ein $m \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie (ohne Beweis) ein Hasse-Diagramm an, aus dem der vollständige Zwischenkörperverband, inklusive Inklusionen und Erweiterungsgrade, für die Erweiterung

$$\mathbb{F}_{7^{165}} \mid \mathbb{F}_7$$

endlicher Körper der Mächtigkeiten 7^{165} bzw. 7 ersichtlich ist.

(c) Sei L ein Zerfällungskörper für $X^5 - 1$ über $\mathbb{Q}$.

Bestimmen Sie (mit Begründung!) die vollständige Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(L)$ des Körpers L.

(d) Erläutern Sie (in maximal 12 verständlichen Sätzen), wieso das reguläre 5-Eck mit Zirkel und Lineal konstruierbar, das reguläre 7-Eck hingegen *nicht* mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist.