Mathematisches Institut
Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Dr. Benno Kuckuck

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Klausur Algebra

Sommersemester 2017
26.09.2017

Nachname: ....

Vorname: ....

Matrikelnr: ....

Unterschrift: ....

Bitte beachten Sie die folgenden Hinweise:

- Beginnen Sie die Klausur nur nach der allgemeinen Aufforderung.
- Schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Beginnen Sie jede neue Aufgabe jeweils auf einem neuen Blatt.
- Begründen Sie all Ihre Aussagen sorgfältig, falls nicht anders verlangt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten.
- Geben Sie am Ende die Aufgabenblätter und Ihre jeweiligen Lösungsblätter geordnet ab.
- Es sind zur Klausur außer geeignetem Schreibgerät keinerlei Hilfsmittel zugelassen.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1 $(7 + 6 + 6 + 6 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Markieren Sie für jede Aussage direkt auf diesem Blatt, ob diese wahr (W) oder falsch (F) ist. (Keine schriftlichen Begründungen!)

W	F	
☐	☐	Ist G eine endliche Gruppe und $n \in \mathbb{N}$ ein Teiler von $\lvert G\rvert$, so besitzt G eine Untergruppe der Ordnung n.
☐	☐	Im Ring $\mathbb{Z}[i]$ der ganzen gaußschen Zahlen besitzen je zwei Elemente einen größten gemeinsamen Teiler.
☐	☐	Für jedes $a \in \mathbb{N}$ ist die Einheitengruppe des Restklassenrings $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ zyklisch.
☐	☐	Haben zwei Integritätsbereiche R_1 und R_2 isomorphe Quotientenkörper, so sind R_1 und R_2 bereits isomorph.
☐	☐	Eine Körpererweiterung $M \mid K$ mit Zwischenkörper L ist genau dann algebraisch, wenn $M \mid L$ und $L \mid K$ jeweils algebraisch sind.
☐	☐	Als Punkt der komplexen Zahlenebene läßt sich $\sqrt[4]{2}+\sqrt{3}i$ mit Zirkel und Lineal aus $\{0, 1\}$ konstruieren.
☐	☐	Jede galoissche Körpererweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ vom Grad 60 ist eine Radikalerweiterung.

Bitte bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenteile auf einem separaten Blatt:

(b) Bestimmen Sie für jedes der folgenden Polynome den Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ als Teilkörper von $\mathbb{C}$, sowie den Grad des Zerfällungskörpers über $\mathbb{Q}$; begründen Sie kurz Ihre Antwort.

(i) $f = X^7 - 5$.

(ii) $g = 2X^2 + 3X - 2$.

(c) Formulieren Sie das Zornsche Lemma.

Dazu dürfen Sie ohne weitere Erklärungen das Konzept „geordnete Menge“ verwenden; erläutern Sie aber kurz die Begriffe

„Kette“, „obere Schranke“ und „maximales Element“.

(d) Skizzieren Sie mit Hilfe des Zornschen Lemmas einen Beweis für den folgenden Satz von Krull:

Sei R ein Ring mit 1, und sei $I \trianglelefteq R$ ein Ideal mit $I \subsetneq R$. Dann existiert ein maximales Ideal $M \trianglelefteq_{\max} R$ mit $I \subseteq M$.

(*Bewertung in Aufgabe 1, Teil* (a)*: pro korrekte Antwort 1 Punkt.*)

Aufgabe 2 $(8 + 12 + 5 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Sei $\Omega \curvearrowleft G$ eine Gruppenoperation von einer endlichen Gruppe G auf einer endlichen Menge Ω.

Definieren Sie für $x \in \Omega$ den Stabilisator G_x von x in G und beweisen Sie die Bahnlängenformel

$$|\{x.g \mid g \in G\}| = |G : G_x|.$$

(b) Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung p^m für eine Primzahl p und $m \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, per Induktion nach m und indem Sie die Konjugation von G auf sich betrachten, daß es eine endliche Kette

$$\{1\} = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_m = G$$

von Normalteilern $G_i \trianglelefteq G$ gibt, dergestalt, daß die Faktorgruppe G_i/G_{i-1} für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ zyklisch der Ordnung p ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, daß das Zentrum $\mathrm{Z}(G)$ nicht trivial ist.

(c) Sei $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$. Berechnen Sie die Ordnung $|G|$, und geben Sie zu einer ungeraden Primzahl p Ihrer Wahl, die $|G|$ teilt, eine p-Sylowuntergruppe von G an.

Tipp: Denken Sie an Minimalpolynome geeigneter Elemente in Körpererweiterungen von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, vom Grad 2 bzw. 3, und die zugehörigen Begleitmatrizen.

Aufgabe 3 $(7 + 8 + 4 + 6 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Geben Sie die Definitionen für einen euklidischen Ring und für einen Hauptidealring an.

(b) Zeigen Sie, daß jeder euklidische Ring ein Hauptidealring ist.

(c) Formulieren Sie das Gaußsche Irreduzibilitätskriterium für Polynome über $\mathbb{Q}$.

(d) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $a < b < c$. Zeigen Sie:

$$f = (X - a)^2(X - b)^2(X - c)^2 + 1$$

ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Tipp: Beachten Sie $f(a) = f(b) = f(c) = 1$ und $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Folgern Sie zunächst, daß eine nicht-triviale Faktorisierung $f = gh$ mit normierten Polynomen $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ nur für $\operatorname{grad}(g) = 2$ und $\operatorname{grad}(h) = 4$ bzw. andersherum in Frage kommt. Zeigen Sie dann, daß zusätzlich $g(a) = g(b) = g(c)$ gelten müßte.

Aufgabe 4 $(8 + 6 + 11 = 25$ *Punkte*$)$

(a) Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Bekanntlich heißt f separabel über K, falls f in beliebigen Erweiterungskörpern von K ausschließlich einfache Nullstellen besitzt.

Zeigen Sie: f ist genau dann separabel über K, wenn die formale Ableitung f' nicht gleich dem Nullpolynom ist.

(b) Sei K ein endlicher Körper der Charakteristik p.

Zeigen Sie: $K \to K$, $\alpha \mapsto \alpha^p$ ist ein Körperautomorphismus.

Zeigen Sie weiter: Jedes irreduzible Polynom $f \in K[X]$ ist separabel.

(c) Sei L ein Zerfällungskörper für $X^7 - 1$ über $K = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2})$.

Bestimmen Sie die vollständige Galoisgruppe $\operatorname{Gal}(L \,|\, K)$ und begründen Sie knapp Ihr Ergebnis.

Zeichnen Sie (ohne weitere Begründung) das Hasse-Diagramm des Zwischenkörperverbands $L \,|\, K$. Aus diesem sollten die Anzahl der Zwischenkörper sowie ihre Inklusionsbeziehungen und Erweiterungsgrade ersichtlich werden. Sie brauchen die Zwischenkörper selbst jedoch nicht explizit zu beschreiben.