

Übungen zu Analysis I

45. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\log(1+x)}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right).$$

46. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ce^x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

47. (a) Finden Sie eine 2-mal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'' = f$ und $f' \neq f$.

(b) Finden Sie eine 3-mal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f''' = f$ und $f' \neq f$.

48. Bei der folgenden Extremwertaufgabe dürfen Sie ausnahmsweise auch die Teile Ihres Schulwissens benutzen, die noch nicht in der Vorlesung behandelt wurden: Aus einem kreisrunden Stück Papier soll ein Sektor so herausgeschnitten werden, dass daraus ein Kreiskegel möglichst großen Volumens geformt werden kann. Bestimmen Sie den dafür nötigen Sektorwinkel.

Abgabe: Dienstag, den 7. Juli 2009, 11.10 Uhr