Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
15.06.2012

TEST ZUR ANALYSIS I

1. (2+3 P.)

(a) Formulieren Sie das Induktionsprinzip.

(b) Beweisen Sie für $n \geq 2$ und $x \geq 0$ die Ungleichung

$$(1+x)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

2. (5 P.)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind:

(a) Der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist ein vollständiger, archimedesch angeordneter Körper.

(b) Die Potenzmenge der Menge der rationalen Zahlen ist überabzählbar.

(c) Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

(d) Jede beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine größte obere Schranke.

(d) Besitzt eine monotone Folge einen Häufungswert, so ist sie konvergent.

Bitte wenden!

3. (4+3 P.)

Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} \quad (n \geq 1).$$

(a) Zeigen Sie, dass (x_n) in $\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. (3+4 P.)

Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für die nachstehenden Folgen (a_n) :

(a) $a_n = \sqrt[3]{n}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)$,

(b) $a_n = \sqrt[n]{n^5 + 4n}$.

5. (2 + 2 P.)

Bestimmen Sie Supremum und Infimum der folgenden beschränkten Teilmengen von $\mathbb{R}$:

(a) $M_1 = \{x^3 : -2 < x \leq 3\}$,

(b) $M_2 = \{1 + \frac{1}{k^2} : k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$.

Entscheiden Sie auch, in welchen Fällen ein Maximum bzw. ein Minimum vorliegt.