Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SS 2012
20.04.2012
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

5. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$,

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$.

Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

Im Folgenden sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$.

6. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n+1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$.

7. Zeigen Sie: Zu jedem $q \geq 1$ existieren rationale Zahlen $a_{k,q}$, $1 \leq k \leq q-1$, so dass

$$s_n(q) = \frac{1}{q+1}n^{q+1} + \frac{1}{2}n^q + \sum_{k=1}^{q-1} a_{k,q}n^{q-k}.$$

8. Durch Aufspalten von $s_{2n}(p)$ in Beiträge von geraden und ungeraden Indices zeige man die Identität

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^p = s_{2n}(p) - 2^p s_n(p).$$

Was ergibt sich für $p \in \{1, 2, 3\}$?

Abgabe: Fr., 27.04.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 02.05.2012 und Do., 02.05.2012