Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
27.04.2012
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

9. Für komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind Addition und Multiplikation gegeben durch

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

und

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Zeigen Sie, daß hierfür die Axiome (K5) - (K8) der Multiplikation und das Distributivgesetz (K9) gelten. Dabei können Sie lediglich auf die Körperaxiome für die reellen Zahlen zurückgreifen.

10. Rekapitulieren Sie die Anordnungsaxiome (A1) - (A3) und die damit zusammenhängenden Begriffe und Bezeichnungen (kurze Zusammenfassung, ca. $\frac{1}{4}$ Seite). Beweisen Sie die Folgerungen 5., 8. und 9. aus diesen Axiomen, das sind:

(a) $x < y$ und $a < 0$ implizieren $ax > ay$,
(b) aus $x > 0$ folgt $\frac{1}{x} > 0$,
(c) $0 < x < y$ impliziert $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$.

Hierbei können Sie alle jeweils vorangehenden Folgerungen aus den Axiomen benutzen. Machen Sie in jedem Schritt kenntlich, welches Axiom bzw. welche Folgerung Sie verwenden.

11. Zeigen Sie die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + nx}.$$

Bitte wenden!

12. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $c \in \mathbb{C}^*$ besitzt die Gleichung $z^2 = c$ genau zwei Lösungen.

(b) Jede quadratische Gleichung

$$w^2 + \lambda w + \mu = 0$$

mit $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ besitzt die Lösungen $w_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} - \mu}$, wobei $\pm\sqrt{c}$ die Lösungen der Gleichung $z^2 = c$ aus Teil (a) bezeichnet.

Abgabe: Fr., 04.05.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 09.05.2012 und Do., 10.05.2012