Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
04.05.2012
Blatt 4

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

13. Es sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge und $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + .. + a_n)$ das arithmetische Mittel der Zahlen $a_1, .., a_n$. Man zeige, daß

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = a.$$

Man gebe eine divergente Folge an, für die die zugehörige Folge der arithmetischen Mittel konvergiert.

14. Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} a_n$ der nachstehenden Folgen (a_n):

(a) $a_n = \dfrac{4^n n^4 + n^6}{5^n}$ (b) $a_n = \dfrac{(n^2 - 5in)^3 - n^6}{n^5}$

(c) $a_n = \dfrac{5n^3 + 7n^2}{2(n+2)(n+1)n}$ (d) $a_n = \dfrac{(3+4i)^n}{6^n}$

15. Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}, \qquad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}, \qquad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}.$$

Zeigen Sie: Für $1 \leq n < 1000000$ gilt $a_n > b_n > c_n$, aber

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = \infty.$$

Hinweis: 3. binomische Formel.

16. Für $\alpha > 0$ sei $z_\alpha := \alpha(1 + i)$, i die imaginäre Einheit. Bestimmen Sie alle Häufungswerte der Folge $(z_\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von α.

Abgabe: Fr., 11.05.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 16.05.2012 und Fr., 18.05.2012