

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

17. Für festes $k \in \mathbb{N}$ zeige man, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, wobei

$$(a) \quad a_n = \frac{k^n}{n!} \qquad (b) \quad a_n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}.$$

Verwenden Sie das "Sandwich-Theorem".

18. Die Folge (x_n) sei rekursiv definiert durch

$$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen Sie, daß (x_n) eine Cauchy-Folge ist, und berechnen Sie den Grenzwert. Ist (x_n) monoton (fallend oder wachsend)?

Hinweis: Zum Nachweis, daß (x_n) eine Cauchy-Folge ist, können Sie Satz 2 aus Abschnitt 2.4 der Vorlesung und die anschließende Bemerkung benutzen.

19. Es seien $p \geq 2$ eine natürliche und $a > 0$ sowie $x_1 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \geq 2$ sei x_n rekursiv definiert durch

$$x_n := \frac{1}{p} \left((p-1)x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^{p-1}} \right).$$

Zeigen Sie für $n \geq 2$, daß $x_n > 0$ gilt, sowie

$$(a) \quad x_n = x_{n-1} \left(1 + \frac{1}{p} \left(\frac{a}{x_{n-1}^p} - 1 \right) \right),$$

$$(b) \quad x_n^p \geq a,$$

$$(c) \quad (x_{n+1} - x_n)x_n^{p-1} \leq 0.$$

Folgern Sie, daß (x_n) gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^p = a$ konvergiert.

Hinweis zu (b): Bernoullische Ungleichung

Bitte wenden!

20. Die Folge (x_n) mit Startwert $x_1 \in \mathbb{R}$ sei rekursiv definiert durch

$$x_{n+1} := x_n - x_n^2.$$

- (1) Zeigen Sie, daß (x_n) monoton fallend ist, und bestimmen Sie alle in Frage kommenden Grenzwerte $x \in \mathbb{R}$.
- (2) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten von (x_n) in Abhängigkeit vom Startwert mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung.
- (3) In welchen Fällen ist (x_n) unbeschränkt?

Abgabe: Fr., 18.05.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 23.05.2012 und Do., 24.05.2012