Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
18.05.2012
Blatt 6

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

21. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e_n^* = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung, dass die Folge (e_n^*) streng monoton fallend ist.

22. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte und begründen Sie Ihre Ergebnisse:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[p]{n}}, \qquad p \in \mathbb{N},$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}, \qquad a \in \mathbb{R}^+,$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p}, \qquad p \in \mathbb{N},$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n,$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n+b^n}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+.$

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

23. Für Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ definiert man $A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$. Beweisen Sie für nichtleere, beschränkte Mengen A und B die Identitäten

(a) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

Bitte wenden!

24. Es seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

(a) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$,

(b) $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup\limits_{n\to\infty} a_n + \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$.

Geben Sie *ein* Folgenpaar an, für das in (a) $<$ und in (b) $>$ gilt. Leiten Sie ferner entsprechende Ungleichungen für $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$ her.

Hinweis: Bereits für Teil (b) beachte man $\liminf_{n\to\infty}(-c_n) = -\limsup_{n\to\infty} c_n$.

Abgabe: Fr., 25.05.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 30.05.2012 und Do., 31.05.2012