Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
01.06.2012
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

29. Finden Sie eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ der alternierenden harmonischen Reihe mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty.$$

30. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Identität

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N+k}{k} = \binom{N+1+n}{n}.$$

(b) Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-z)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} z^n.$$

Hinweis zu (b): Cauchy-Produkt von Reihen.

31. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{2^n} \cdot z^n \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \cdot z^{2n} \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n!} z^{n!}$$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich in den Teilen (c) und (d) um sogenannte "Lückenreihen" handelt, bei denen unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

Bitte wenden!

32. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die f_n die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 26). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 18 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

gilt.

Abgabe: Fr., 08.06.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 13.06.2012 und Do., 14.06.2012