Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
08.06.2012
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

33. Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z + w) = \cosh(z)\sin h(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

34. Es seien $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ die Exponentialfunktion, $\sin(z) = \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))$ und $\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(iz) + \exp(-iz))$. Zeigen Sie:

(a) Ist $x \in \mathbb{R}$ und $x > 0$, so ist $\exp(x) > 1$,

(b) ist $x \in \mathbb{R}$ und $x < 0$, so ist $0 < \exp(x) < 1$,

(c) ist $x \in \mathbb{R}$, so ist $|\exp(ix)| = 1$,

(d) ist $z \in \mathbb{C}$ mit $\sin(z) = 0$ oder $\cos(z) = 0$, so ist z reell.

Bitte wenden!

35. Beweisen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identitäten

(a) $\sin(z) - \sin(w) = 2\cos\left(\frac{z+w}{2}\right)\,\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$,

(b) $\cos(z) - \cos(w) = -2\sin\left(\frac{z+w}{2}\right)\,\sin\left(\frac{z-w}{2}\right)$

Hinweis: $z = \frac{z+w}{2} + \frac{z-w}{2}$, $w = \frac{z+w}{2} - \frac{z-w}{2}$.

36. Es sei $f : \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $c > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$

Beweisen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition, dass f gleichmäßig stetig ist. Als Anwendung zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$

Bemerkung: Eine Funktion f mit der oben genannten Eigenschaft heißt Hölder-stetig zum Exponenten α.

Abgabe: Fr., 15.06.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 20.06.2012 und Do., 21.06.2012