Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
15.06.2012
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

37. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 10^6\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z^2$,

(c) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \exp(x)$,

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z^3$.

38.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a_\pm \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

39. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat eine reelle Nullstelle, wenn n ungerade ist.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a, b] \to [a, b]$ besitzt einen Fixpunkt (d. i. eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$).

Bitte wenden!

40. Man beweise für alle $z, w \in \mathbb{C}$, für die $\tan(z)$, $\tan(w)$ und $\tan(z+w)$ definiert sind, das Additionstheorem für den Tangens:

$$\tan(z+w) = \frac{\tan(z) + \tan(w)}{1 - \tan(z)\tan(w)}.$$

Bestimmen und beweisen Sie ein entsprechendes Additionstheorem für den Cotangens.

Abgabe: Fr., 22.06.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 27.06.2012 und Do., 28.06.2012