Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
22.06.2012
Blatt 11

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

41. Berechnen Sie die Umkehrfunktionen der nachstehenden Bijektionen durch elementare Umformungen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := 3\,x + 7;$

(b) $f : [0,1] \to [0,1]\,, \quad x \longmapsto f(x) := \sqrt{1 - x^2};$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := x|x|$

Hinweis: In (c) und (d) sind Fallunterscheidungen erforderlich.

42. Die Funktionen f und g seien n-mal differenzierbar. Durch vollständige Induktion nach n beweise man die Identität

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Orientieren Sie sich dabei am Beweis des binomischen Lehrsatzes. Als Anwendung berechne man $f^{(1000)}(x)$ für $f(x) = x^2 \sin(x)$.

43. Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{arccot}(x),$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2|x|,$

(c) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x,$

(d) $f : (-1, 1) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \arccos(x).$

Bitte wenden!

44. Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Identität

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Verfahren Sie dabei wie bei der Herleitung der Logarithmusreihe.

Abgabe: Fr., 29.06.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 04.07.2012 und Do., 05.07.2012