Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2012
29.06.2012
Blatt 12

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

45.(Hölder'sche Ungleichung) Es seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{x^p}{p} + \frac{x^{-q}}{q}.$$

Zeigen Sie, daß f in $x_0 = 1$ ein globales Minimum besitzt, und folgern Sie

(a) $1 \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{x^{-q}}{q}$, $(x > 0)$,

(b) $uv \leq \dfrac{u^p}{p} + \dfrac{v^q}{q}$, $(u, v \geq 0)$,

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q)^{\frac{1}{q}}$ $(u_i, v_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

46.

(a) Die Funktionen f und g seien in einer Umgebung des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}$ $n+1$-mal stetig differenzierbar. Ferner gelte $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$ für $0 \leq k \leq n$ sowie $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - x \sin x} - \cos x}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

47. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der folgenden, für alle $x \in \mathbb{R}$ definierten Funktionen:

(a) $f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x)$,

(b) $f_2(x) = x^n \exp(-x^2)$, hierbei $n \in \mathbb{N}$ fest.

In welchen Fällen liegen globale Extrema vor?

Bitte wenden!

48. Berechnen Sie für die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin^2(x)$$

die Taylorreihe $Tf(x, x_0)$ mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, indem Sie alle Ableitungen von f in x_0 bestimmen. (Beachten Sie hierbei, dass aufgrund des Additionstheorems für den Sinus $f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$ gilt.) Zeigen Sie auch, dass der Reihenrest

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^n$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $n \to \infty$ gegen Null konvergiert.

Abgabe: Fr., 06.07.2012, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 11.07.2012 und Do., 12.07.2012