Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
25.04.2014
Blatt 2

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

5. Beweisen Sie die nachstehenden Teilbarkeitsaussagen:
(a) $2^{3n} - 1$ ist teilbar durch 7 für alle $n \in \mathbb{N}$.
(b) $3^{2n+1} + 1$ ist teilbar durch 4 für alle $n \in \mathbb{N}$.

6. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:
(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$,
(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$.
Zusatz zu Teil (a): Wie groß ist die Anzahl *aller* Quadrate auf einem Schachbrett?

7. Man berechne $1+3$, $1+3+5$ und $1+3+5+7$, leite eine allgemeine Formel für

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1 + 3 + \cdots + (2n-3) + (2n-1)$$

her und beweise diese durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

8. Für natürliche Zahlen n und p sei $s_n(p) = \sum_{k=1}^{n} k^p$. Durch Aufspalten von $s_{2n}(p)$ in Beiträge von geraden und ungeraden Indices zeige man die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^p = s_{2n}(p) - 2^p s_n(p).$$

Was ergibt sich hieraus für $p \in \{2, 3\}$, wenn Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 6 verwenden?

Abgabe: Fr., 02.05.2014, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 07.05.2014 und Do., 08.05.2014