Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
02.05.2014
Blatt 3

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

9. Für komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ sind Addition und Multiplikation gegeben durch

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

und

$$zw = (xu - yv) + i(xv + yu).$$

Zeigen Sie, dass hierfür das Assoziativgesetz der Multiplikation (K5) und das Distributivgesetz (K9) gelten. Geben Sie dabei an, an welcher Stelle Sie die Definitionen und die Körperaxiome für die reellen Zahlen verwenden.

10. Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ dar.

(a) $(1 + i)^4$

(b) $\dfrac{1}{(3 - i)^2}$

(c) $\dfrac{2 + 3i}{1 - 2i} + \dfrac{i}{3 + i}$

(d) $i^k,\ k \in \mathbb{Z}$

Wie bereits auf Blatt 2 sei im folgenden $s_n(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$.

11. Zeigen Sie durch Induktion über n und mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes die Pascal'sche Identität

$$\sum_{p=0}^{q} \binom{q+1}{p} s_n(p) = (n + 1)^{q+1} - 1.$$

Folgern Sie, dass $s_n(4) = \dfrac{1}{30} n(n + 1)(2n + 1)(3n^2 + 3n - 1)$.

Bitte wenden!

12. Zeigen Sie: Zu jedem $q \geq 1$ existieren rationale Zahlen $a_{k,q}$, $1 \leq k \leq q-1$, so dass

$$s_n(q) = \frac{1}{q+1} n^{q+1} + \frac{1}{2} n^q + \sum_{k=1}^{q-1} a_{k,q} n^{q-k}.$$

Abgabe: Fr., 09.05.2014, 10.25 Uhr

Besprechung: Do., 15.05.2014 und Fr., 16.05.2014 (im Tutorium)