Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
06.06.2014
Blatt 8

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

29. Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ für vier der nachstehenden fünf Folgen (a_n) auf Konvergenz und absolute Konvergenz:

(a) $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ (b) $a_n = \frac{(1+i)^n}{n^2}$ (c) $a_n = \frac{i^{(n^2)}}{n}$

(d) $a_n = \frac{(3+4i)^n}{5^n \sqrt[999]{n}}$ (e) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$

Benennen Sie die Konvergenzkriterien für Reihen, die Sie benutzt haben.

Hinweis: Durch Bearbeitung aller fünf Aufgabenteile kann ein Zusatzpunkt erworben werden.

30. Die b-adische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b^k}\ , \quad a_k \in \{0, ..., b-1\}$$

einer reellen Zahl $x \in [0,1]$ heißt *periodisch*, falls $k_0 \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$ existieren, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt $a_{k+l} = a_k$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall x rational ist.

Anleitung: Mit Hilfe der geometrischen Reihe zeige man die Darstellung

$$x = \sum_{k=1}^{k_0-1} \frac{a_k}{b^k} + \frac{b^l}{b^l - 1} \sum_{k=k_0}^{k_0+l-1} \frac{a_k}{b^k}.$$

31. Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) Für $n, N \in \mathbb{N}_0$ gilt die Identität $\sum_{k=0}^{n} \binom{N+k}{k} = \binom{N+1+n}{n}$.

(b) Für $N \in \mathbb{N}_0$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ ist

$$\frac{1}{(1-z)^{N+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N+n}{n} z^n.$$

Hinweis zu (b): Cauchy-Produkt von Reihen.

Bitte wenden!

32. Herr Hase ist ein begeisterter Jogger. Eines Morgens macht er sich auf und läuft zunächst 16 Kilometer nach Osten. Dann biegt er nach Norden ab und legt 8 Kilometer zurück, um anschliessend 4 Kilometer in westlicher Richtung zu laufen. Es folgen 2 Kilometer nach Süden, ein Kilometer nach Osten usf..

Sein Bekannter, Herr Igel, ist weniger sportbegeistert und wandert lieber gemächlichen Schrittes, mitunter auch querfeldein. Dementsprechend ist er auch nur halb so schnell unterwegs wie Herr Hase. Er macht sich exakt zur selben Zeit und vom selben Ort auf und geht - ungefähr - in ost-nord-östlicher Richtung, ohne auch nur einmal diese Richtung zu ändern. Nach ihrer Rückkehr am Abend behauptet Herr Igel, er habe Herrn Hase an seinem Zielort bereits erwartet, als dieser dort eingelaufen sei, und das, obwohl er selbst, auf dem Weg dorthin, sich noch eine kurze Pause gegönnt habe. Herr Hase bestreitet dies auf das heftigste.

Wo liegt der Zielort, und wem der beiden können wir Glauben schenken, wenn wir unterstellen, dass Herr Igel am Morgen gleich die richtige Richtung eingeschlagen hat?

Hinweis: Geometrische Reihe im Komplexen

Abgabe: Fr., 20.06.2014, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 25.06.2014 und Mi., 26.06.2014