Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
20.06.2014
Blatt 9

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

33. Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\text{(a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^7}{2^n} \cdot z^n \quad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \cdot z^{2n} \quad \text{(d)} \sum_{n=0}^{\infty} 4^{n!} z^{n!}$$

Untersuchen Sie auch das Konvergenzverhalten dieser Reihen auf dem Rand ihres Konvergenzkreises.

Hinweis: Beachten Sie, dass es sich in den Teilen (c) und (d) um sogenannte "Lückenreihen" handelt, bei denen unendlich viele $a_n = 0$ sind. Hier ist die Eulersche Formel für den Konvergenzradius nicht ohne weiteres anwendbar, auch bei der Formel von Cauchy-Hadamard ist Vorsicht geboten.

34. Bestimmen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n,$$

wobei die f_n die Fibonacci-Zahlen sind (vgl. Aufgabe 28). Leiten Sie dazu eine Rekursion für $x_n := \frac{f_n}{f_{n+1}}$ her und verwenden Sie Aufgabe 22 sowie die Eulersche Formel für den Konvergenzradius. Zeigen Sie ferner, dass für $|z| < R$ die Identität

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$

gilt.

35. Die Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Cosinus hyperbolicus)},$$
$$\sinh : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ (Sinus hyperbolicus)},$$

sind definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)),$$
$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)).$$

Bitte wenden!

Bestimmen Sie die Potenzreihendarstellungen dieser Funktionen, und zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$,

(b) $\sinh(z + w) = \cosh(z)\sin h(w) + \sinh(z)\cosh(w)$,

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

36. Es sei $f : \mathbb{C} \supset X \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $c > 0$ und $\alpha \in \mathbb{Q} \cap (0, 1]$ existieren, so dass für alle $x, y \in X$
$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha.$$
Beweisen Sie unter Verwendung der ε-δ-Definition, dass f gleichmäßig stetig ist. Als Anwendung zeige man die gleichmäßige Stetigkeit von
$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x}.$$
Bemerkung: Eine Funktion f mit der oben genannten Eigenschaft heißt Hölder-stetig zum Exponenten α.

Abgabe: Fr., 27.06.2014, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 02.07.2014 und Do., 03.07.2014