Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
PD. Dr. Axel Grünrock

SoSe 2014
27.06.2014
Blatt 10

ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

37. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

(b) $f : \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 10^6\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z^{27} + 2z^{15} + \exp(z)$,

(c) $f : (-\infty, 0] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \exp(x)$,

(d) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z) := z(1+z)$.

38.

(a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass die Grenzwerte $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a_\pm \in \mathbb{R}$ existieren. Zeigen Sie, dass f gleichmäßig stetig ist.

(b) Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, die stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.

39. Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes:

(a) Jedes Polynom der Gestalt

$$P(x) = x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hat eine reelle Nullstelle, wenn n ungerade ist.

(b) Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ besitzt einen Fixpunkt (d. i. eine Lösung der Gleichung $f(x) = x$).

Bitte wenden!

40. Berechnen Sie die Umkehrfunktionen der nachstehenden Bijektionen durch elementare Umformungen:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := 3\,x + 7;$

(b) $f : [0,1] \to [0,1]\,, \quad x \longmapsto f(x) := \sqrt{1 - x^2};$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := x^3 - 3\,x^2 + 3\,x - 1$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) := x|x|$

Hinweis: In (c) und (d) sind Fallunterscheidungen erforderlich.

Abgabe: Fr., 04.07.2014, 10.25 Uhr

Besprechung: Mi., 09.07.2014 und Do., 10.07.2014