

## ÜBUNGEN ZUR ANALYSIS I

41. Berechnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen der folgenden Funktionen

(a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \operatorname{arccot}(x),$

(b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2|x|,$

(c)  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x,$

(d)  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \arccos(x).$

42. Zeigen Sie für  $x \in (-1, 1)$  die Identität

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Verfahren Sie dabei wie bei der Herleitung der Logarithmusreihe.

43. (Regel von de l'Hospital)

(a) Die Funktionen  $f$  und  $g$  seien in einer Umgebung des Punktes  $x_0 \in \mathbb{R}$   $n+1$ -mal stetig differenzierbar. Ferner gelte  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0$  für  $0 \leq k \leq n$  sowie  $g^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ . Zeigen Sie:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{g^{(n+1)}(x_0)}.$$

(b) Mit Hilfe von (a) bestimme man den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - x \sin x} - \cos x}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Bitte wenden!

44. Bestimmen Sie alle lokalen Maxima und Minima der folgenden, für alle  $x \in \mathbb{R}$  definierten Funktionen:

(a)  $f_1(x) = \frac{x}{\sqrt{2}} - \sin^2(x)$ ,

(b)  $f_2(x) = x^n \exp(-x^2)$ , hierbei  $n \in \mathbb{N}$  fest.

In welchen Fällen liegen globale Extrema vor?

**Abgabe:** Fr., 11.07.2014, 10.25 Uhr

**Besprechung:** Mi., 16.07.2014 und Do., 17.07.2014